

## Planchers courants

**1 : Généralités sur les planchers**

**2 : Calcul des dalles**

**3 : Calcul des poutres continues**

**4 : Exemple de calcul d'une poutre isostatique**



*Rien n'a été à la fois trouvé et porté à sa perfection  
Cicéron*

# TABLE DES MATIERES

## 1. GÉNÉRALITÉS

- 1.1. Plancher à nervures
- 1.2. Dalle à caisson
- 1.3. Dalle champignon
- 1.4. Plancher à corps creux et poutrelles
- 1.5. Plancher composé d'une dalle s'appuyant sur un réseau de poutres

## 2. CALCUL DES DALLES

### 2.1. Définitions

### 2.2. Aspect théorique

### 2.3. Calcul des moments et efforts tranchants d'après les abaques de Pigeaud

#### 2.3.1. Cas des plaques chargées uniformément

##### 2.3.1.1. Panneau rectangulaire isostatique

##### 2.3.1.2. Dalles continues

##### 2.3.1.3. Effort tranchant

#### 2.3.2. Cas des charges concentrées sur un rectangle concentrique à la dalle

#### 2.3.3. Cas des charges concentrées sur un rectangle non concentrique à la plaque

### 2.4. Calcul conforme au règlement BAEL 91 révisées 99

#### 2.4.1. Cas des dalles rectangulaires avec $\alpha \leq 0,4$

#### 2.4.2. Cas des dalles rectangulaires avec $\alpha > 0,4$

### 2.5. Calcul du ferrailage des dalles

#### 2.5.1. Armatures de flexion

#### 2.5.2. Armatures d'effort tranchant

#### 2.5.3. Armatures de poinçonnement

##### 2.5.3.1. Rectangle d'impact

##### 2.5.3.2. Vérification de la résistance au poinçonnement

#### 2.5.4. Disposition des armatures

#### 2.5.5. Arrêt des barres

##### 2.5.5.1. Première méthode

##### 2.5.5.2. Deuxième méthode

### 2.6. Vérification des déformations

### 2.7. Condition de non fragilité

## 3. POUTRES DE PLANCHERS

### 3.1. Essais de poutres en béton armé

### 3.2. Planchers à charge d'exploitation modérée : Méthode forfaitaire

#### 3.2.1. Domaine d'application

#### 3.2.2. Principe de la méthode

#### 3.2.3. Application de la méthode

### **3.2.4. Transmission des charges**

#### **3.2.4.1. Méthode des lignes de rupture**

#### **3.2.4.2. Méthode de Pigeaud**

### **3.2.5. Effort tranchant**

### **3.2.6. Arrêt des barres**

## **3.3. Planchers à charge d'exploitation élevée : Méthode de Caquot**

### **3.3.1. Domaine d'application**

### **3.3.2. Principe de la méthode**

### **3.3.3. Moments sur appui**

#### **3.3.3.1. Cas des charges réparties**

#### **3.3.3.2. Cas des charges concentrées**

#### **3.3.3.3. Moments en travée**

#### **3.3.3.4. Efforts tranchants**

#### **3.3.3.5. Arrêt des barres et vérification des appuis**

## **4. EXEMPLE DE CALCUL D'UNE POUTRE ISOSTATIQUE**

## **ANNEXES**

### **Annexe 1 : Abaques de Pigeaud**

### **Annexe 2 : Valeurs de $k_w$ et $k_e$ en fonction $a_w/l_w$ ou $a_e/l_e$**

### **Annexe 3 : Organigramme de calcul d'une section rectangulaire**

# PLANCHERS COURANTS

## 1. GÉNÉRALITÉS

Un plancher d'habitation ou d'usine est une aire généralement plane, destinée à limiter les étages et à supporter les revêtements de sols.

Les principales fonctions d'un plancher sont :

- Supporter les charges permanentes et les surcharges d'exploitation (variables et accidentelles) pour les transmettre aux éléments porteurs que sont les murs et les poteaux.
- Transmettre les efforts horizontaux aux éléments de contreventement vertical.
- Posséder un poids modeste pour réduire au maximum la charge permanente.
- Assurer une bonne isolation phonique.
- Offrir une surface praticable pour des revêtements.
- Protéger contre l'humidité.
- Résister au feu.
- Permettre la distribution de fluides, particulièrement l'électricité.
- Conserver dans le temps ses qualités physiques, mécaniques, acoustiques, son aspect et sa planéité.
- Etc.

Les planchers en béton armé peuvent être coulés sur place ou préfabriqués. On distingue :

### 1.1. Plancher à nervures

Le plancher est constitué par une dalle générale d'épaisseur relativement faible et des poutrelles rapprochées. La largeur des nervures est choisie de sorte que les armatures puissent être disposées et enrobées correctement. L'épaisseur varie entre 4 cm et 10 cm. C'est donc une dalle plus légère que la dalle pleine (Fig.1.1a).

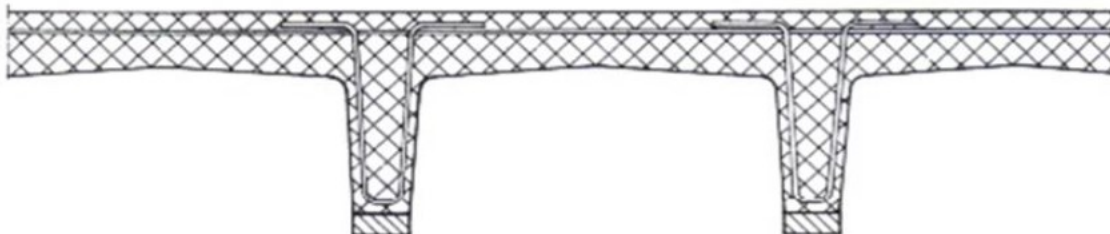


Figure 1.1a: Dalle nervurée

La hauteur totale  $H$  (Nervure + Dalle) est comprise entre 25 cm à 35 cm. La dalle nervurée est indiquée pour couvrir des locaux de forme allongée. Elle porte dans un seul sens. Lorsque la portée

L dépasse 4 m, il est préconisé d'ajouter une ou plusieurs nervures transversales de raidissement pour solidariser les autres nervures.

Ce type de dalle offre moins de souplesse d'utilisation que la dalle pleine.

### 1.2. Dalle à caisson

C'est un plancher constitué par un réseau de nervures croisées (disposées dans les deux sens). Il est recommandé pour couvrir des locaux de forme carrée ou presque carrée (Fig.1.1b).

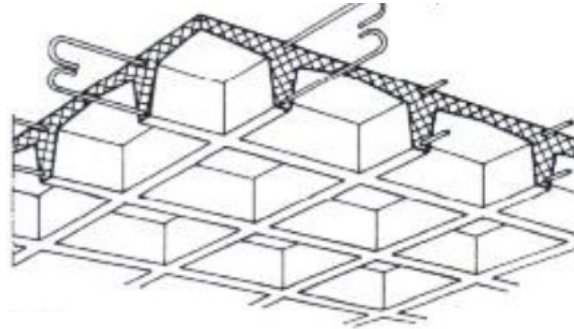


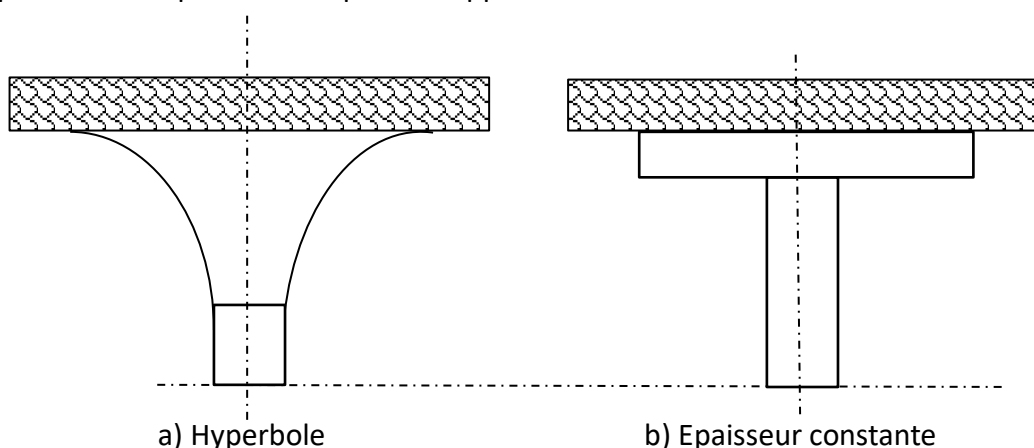
Figure 1.1b: Dalle à caisson

### 1.3. Dalle champignon

La dalle champignon est constituée par une dalle continue, sans nervures, armée dans les deux sens. Elle repose directement sur des poteaux et forme avec ces derniers un cadre dans l'espace. Les réactions transmises par la dalle aux poteaux sont souvent très élevées, d'où un risque de poinçonnement. Pour y remédier, on augmente la section des poteaux au niveau des sommets (forme de champignon). On obtient ainsi une pyramide inversée sous la dalle (Fig.1.1c).

L'espacement des poteaux dans chaque direction est généralement compris entre 10 et 25 mètres, voire plus. L'épaisseur de la dalle est fonction de la distance entre les poteaux. Elle varie entre 20 et 40 cm.

Ce type de plancher est généralement utilisées lorsque les hauteurs de la construction sont faibles et pour éviter la présence de poutres apparentes.



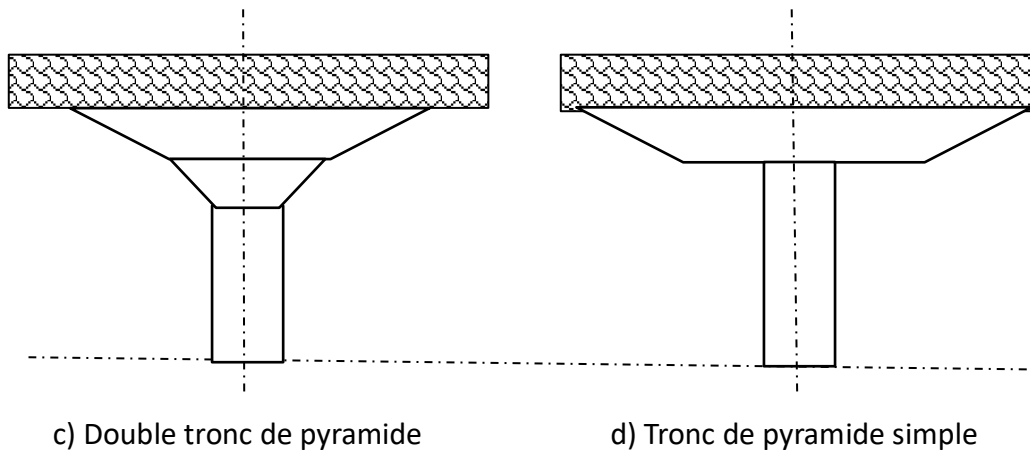


Figure 1.1c : Différents types de plancher champignon

#### 1.4. Plancher à corps creux et poutrelles

On rencontre ce type de plancher dans les bâtiments à usage d'habitation. Le principe consiste à utiliser des corps creux et des poutrelles préfabriquées en béton armé pour former le plancher. Les poutrelles sont disposées à des intervalles réguliers. Ces intervalles sont par la suite remplis avec les corps creux (en terre cuite, béton, ...). Les parois supérieures et latérales des corps creux servent de coffrage aux poutrelles et à la dalle de compression en béton coulée sur toute la surface du plancher. Quant à la partie inférieure, elle sert de support à l'enduit de plafond (en plâtre, en mortier de ciment, ...).

La dalle de compression est armée avec un simple quadrillage d'armatures. Ce quadrillage est généralement constitué par une nappe de treillis soudé avec un espacement de 20 cm x 30 cm au maximum (Fig.1.1d).

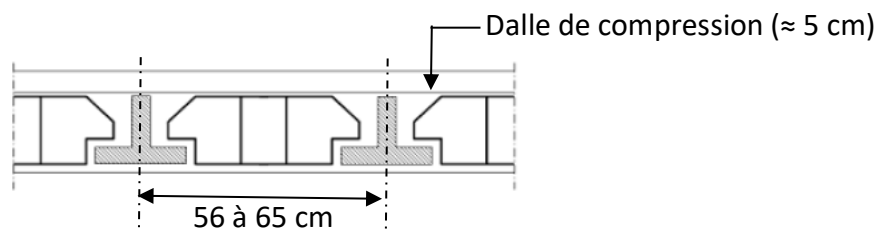


Figure 1.1d: Plancher à corps creux

#### 1.5. Plancher composé d'une dalle s'appuyant sur un réseau de poutres

C'est une plaque ayant une faible épaisseur  $h$  par rapport aux autres dimensions. Cette épaisseur est telle que :

$$l_v/35 \leq h \leq l_v/10 \quad (1.1)$$

La dalle pleine travaille dans les deux sens. Elle porte sur un réseau de poutres transversales et de poutres longitudinales perpendiculaires aux précédentes à qui elle transmet les différentes charges et surcharges.

Ce type de plancher est fréquemment utilisé dans les bâtiments industriels ou d'habitation car il permet une grande souplesse dans les portées et les formes, en particulier, la facilité des divers percements.

En ce qui concerne la transmission des efforts, les panneaux dalle reçoivent les surcharges statiques et dynamiques qui leur sont directement appliquées et les transmettent aux poutres longitudinales et transversales. L'ensemble des efforts sera repris par des poteaux ou par des murs porteurs. La Figure 1.1b représente un plancher dalle avec poutres secondaires et poutres principales.

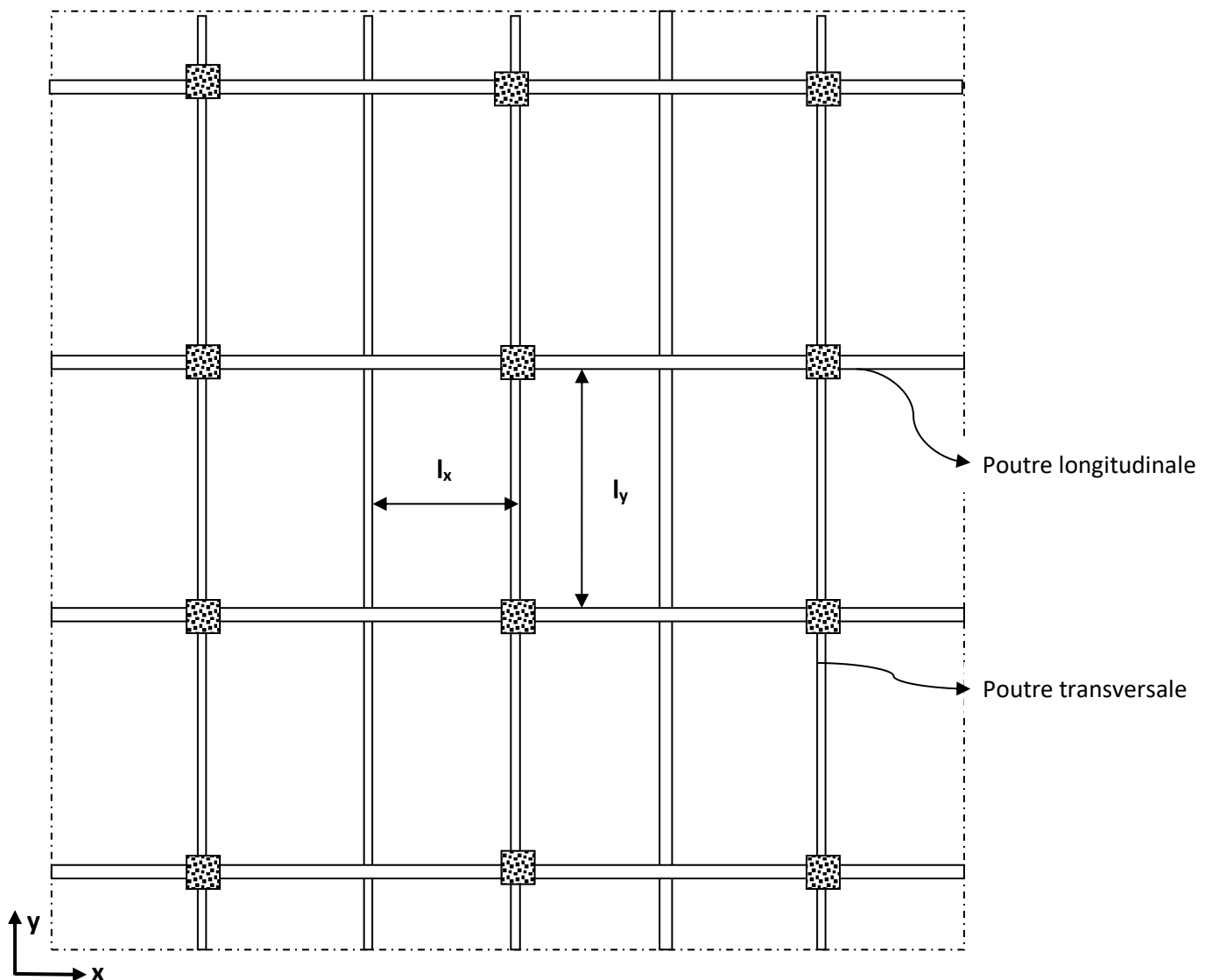


Figure 1.1b: Plancher dalle

Les paragraphes suivants porteront uniquement l'étude des dalles et des poutres continues des planchers dalle.

## 2. CALCUL DES DALLES

### 2.1. Définitions

1) On appelle *élancement* de la dalle le rapport :

$$\alpha = l_x/l_y \leq 1$$

$l_x$  et  $l_y$  = portées de la dalle

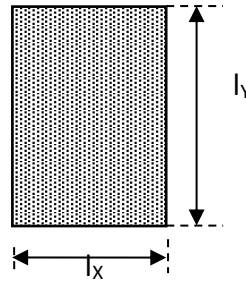


Figure 1.2: Portées d'une dalle

Par convention, on désigne toujours par  $l_x$  la petite portée ( $l_x \leq l_y$ ). En plus,  $l_x$  et  $l_y$  sont mesurées entre nus des appuis (Fig.1.2).

2) Une dalle est une plaque portant dans les deux directions.

3) Une poutre dalle est une plaque présentant deux bords libres sensiblement parallèles, distants d'au moins trois fois l'épaisseur.

### 2.2. Aspect théorique

La théorie du calcul des plaques chargées transversalement et dont les déformations restent petites aboutit à la résolution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1.2)$$

Où,

$w$  = flèche de la plaque, c'est-à-dire, sa déformation perpendiculaire à son plan.

$q$  = fonction de la charge (charge uniformément répartie d'intensité  $q$ ).

$$D = \text{rigidité de la plaque} = \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$$

$E$  et  $\nu$  sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau et  $e$  l'épaisseur de la plaque.

Les moments de flexion et les efforts tranchants par unité de longueur sont donnés par les relations :

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$M_{xy} = -D (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$T_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$T_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$



La résolution de ce problème étant assez laborieuse, on utilise en pratique des méthodes approchées et des résultats donnés sous forme de tableaux ou d'abaques pour des plaques de forme simple (forme rectangulaire dans le cas présent) avec de conditions de bord bien définies, ainsi que des cas de charges particulières.

## 2.3. Calcul des moments et efforts tranchants d'après les abaques de Pigeaud

Pigeaud a publié, dans les annales des Ponts et Chaussées (janvier-février 1921), des abaques permettant de déterminer les moments maximaux suivant la petite et la grande portée pour les plaques rectangulaires simplement appuyées sur leur pourtour, soumises aux charges suivantes :

- Charge uniformément répartie sur la surface de la plaque.
- Charge uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque.

On désigne par  $\alpha$  et  $\alpha'$  les rapports suivants :

$$\alpha = \frac{l_x}{l_y} \rightarrow \alpha' = \frac{l_y}{l_x}$$

$l_x$  et  $l_y$  = dimensions des plaques mesurées entre nus des appuis et telles que  $l_x \leq l_y$

### 2.3.1. Cas des plaques chargées uniformément

#### 2.3.1.1. Panneau rectangulaire isostatique

La charge uniformément répartie étant désignée par  $q$ , les moments de flexion  $M_x$  et  $M_y$  par unité de longueur, au centre de la plaque ont pour valeur :

$$\text{- Suivant le sens de la petite portée : } M_x = (M_1 + \nu M_2) q l_x l_y \quad (\text{daN.m/m}) \quad (1.3)$$

$$\text{- Suivant le sens de la grande portée : } M_y = (\nu M_1 + M_2) q l_x l_y \quad (\text{daN.m/m}) \quad (1.4)$$

Où,

$M_1$  : valeur donnée par l'abaque en fonction de  $\alpha$  (Annexe 1)

$M_2$  : valeur donnée par l'abaque en fonction de  $\alpha'$  (Annexe 1)

$\nu$  : représente le coefficient de Poisson du béton que l'on prend, conformément au règlement BAEL, égal à 0 à l'état limite ultime et 0,2 à l'état limite de service.

#### 2.3.1.2. Dalles continues

Pour les dalles continues, constituées de panneaux rectangulaires considérés comme encastrés sur leurs bords (panneau relié à des appuis présentant un moment d'inertie important, il en résulte un encastrement partiel de ses bords, donc apparition d'un moment négatif à ce niveau), le calcul des moments de flexion s'effectue par la méthode forfaitaire suivante :

- Quel que soit leur élancement  $\alpha = l_x/l_y$ , on commence par déterminer les moments de flexion dans chaque plaque comme si elle était simplement appuyée, ces moments sont désignés par  $M_{0x}$  et  $M_{0y}$ .
- Les moments dans les plaques réelles sont pris égaux à ces moments isostatiques multipliés par des coefficients forfaitaires.

Ces coefficients sont :

Pour un panneau courant (continu sur ses 4 bords) :

- Dans le sens de la petite portée  $\left\{ \begin{array}{l} M_{tx} = 0,75 M_{0x} \\ M_{ax} = -0,5 M_{0x} \end{array} \right.$
- Dans le sens de la grande portée  $\left\{ \begin{array}{l} M_{ty} = 0,75 M_{0y} \\ M_{ay} = -0,5 M_{0x} = M_{ax} \end{array} \right.$

Pour un panneau de rive (à l'extrémité de la dalle) :

- Dans le sens de la petite portée  $\left\{ \begin{array}{l} M_{tx} = 0,85 M_{0x} \\ M_{ax, \text{ extrême}} = -0,3 M_{0x} \text{ et } M_{ax, \text{ continu}} = -0,5 M_{0x} \end{array} \right.$
- Dans le sens de la grande portée  $\left\{ \begin{array}{l} M_{ty} = 0,85 M_{0y} \\ M_{ay, \text{ extrême}} = -0,3 M_{0x} \text{ et } M_{ay, \text{ continu}} = -0,5 M_{0x} \end{array} \right.$

Le moment sur l'appui commun à deux panneaux est le plus grand en valeur absolue des moments déterminés pour chacun des deux panneaux.

Les dispositions forfaitaires sont résumées sur la figure ci-dessous.

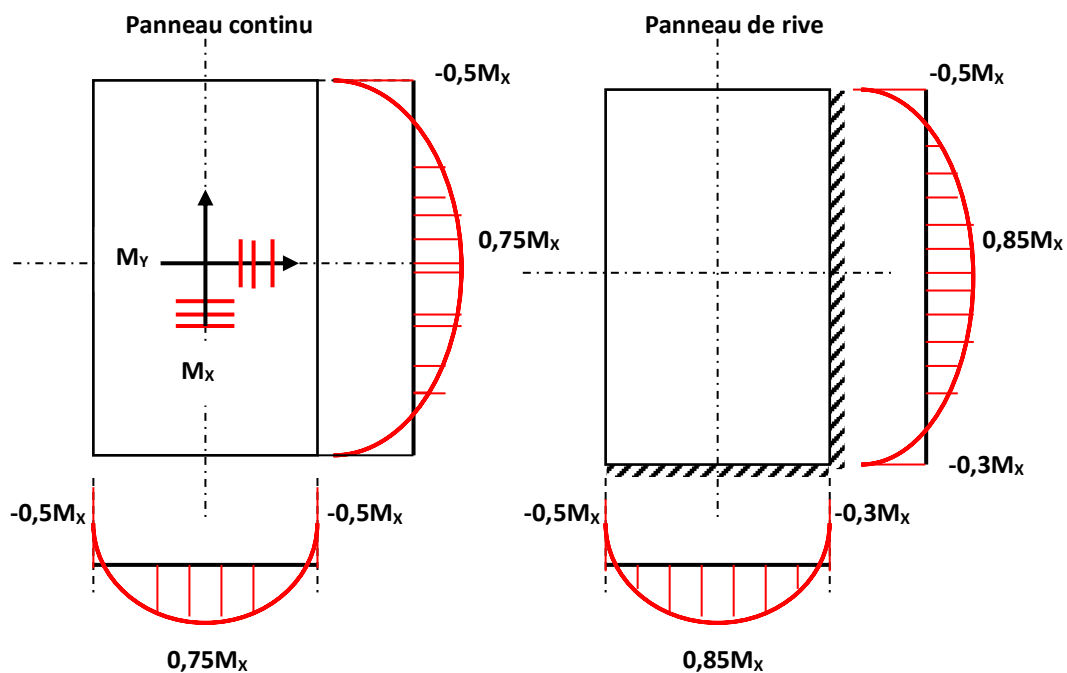


Figure 1.3: Dispositions forfaitaires

### Remarque

Le choix du sens porteur est en général celui de la petite portée. Cela veut dire que le plus grand moment se situe dans le sens  $l_x$  de la plus petite portée et non dans le sens  $l_y$  de la plus grande. Pour mettre en évidence ce fait, raisonnons sur un exemple très simple.

Considérons deux poutres de directions perpendiculaires, en contact en leurs milieux respectifs (le cas des dalles est plus complexe mais cet ensemble peut par la pensée s'y étendre très facilement) et soumises à une charge  $P$ . La poutre la plus courte a une longueur  $l_x$  et la plus longue une longueur  $l_y$  (Fig. 1.4).

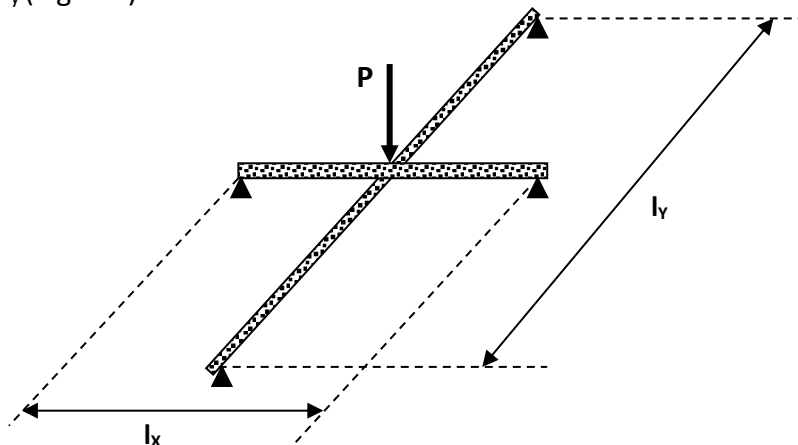


Figure 1.4: Choix du sens porteur

Soit :

- $p'$  la part de la charge  $p$  reprise par la poutre de portée  $l_x$
- $p''$  la part de la charge  $p$  reprise par la poutre de portée  $l_y$

La flèche  $f$  de chacune de ces poutres est de la forme :

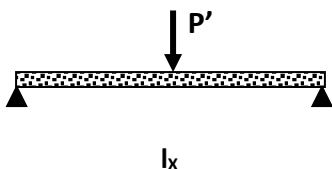
- Poutre de portée  $l_x \rightarrow f_1 = k p' l_x^3 / EI$
- Poutre de portée  $l_y \rightarrow f_2 = k p'' l_y^3 / EI$

Les 2 flèches  $f_1$  et  $f_2$  doivent être égales, et en plus :  $p'' + p' = p$

Les charges  $p'$  et  $p''$  doivent être inversement proportionnelles au cube des longueurs  $l_x$  et  $l_y$ .

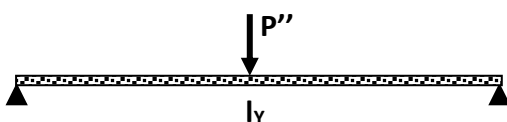
### Exemple

Supposons que  $l_x = l_y / 2$ , alors  $p'$  sera 8 fois plus grande que  $p''$ .



$$M_x^t = \frac{p'}{2} \frac{l_x}{2} = \frac{1}{2} \frac{8}{9} \frac{p}{2} l_x = \frac{2}{9} p l_x$$

$$M_y^t = \frac{p''}{2} \frac{l_y}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{9} p l_x = \frac{1}{18} p l_x$$



On remarque ainsi, que dans cet exemple, le moment dans le sens de la petite portée est 4 fois plus grand que le moment dans la grande portée. *La poutre la plus courte est donc la plus sollicitée.*

### 2.3.1.3. Effort tranchant

Dans les dalles s'appuyant sur quatre côtés, l'effort tranchant par unité de longueur est donné par les formules suivantes.

- Effort tranchant maximal au milieu de  $l_y$  :

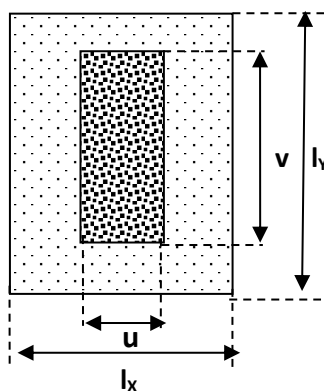
$$T_x = \frac{p}{2l_y + l_x} = \frac{pl_x}{2 + \alpha} \quad (\text{daN/m}) \quad (1.5)$$

- Effort tranchant maximal au milieu de  $l_x$  :

$$T_y = \frac{p}{3l_y} \quad (\text{daN/m}) \quad (1.6)$$

$p$  = charge totale uniformément répartie sur la surface de la plaque, soit :  $p = q l_x l_y$

### 2.3.2. Cas des charges concentrées sur un rectangle concentrique à la dalle



Soit  $P$  la valeur de la charge concentrée. Les moments de flexion pour une plaque simplement appuyée sont :

- Sens de  $l_x$

$$M_x = (M_1 + \nu M_2) P \quad (\text{daNm/m})$$

- Sens de  $l_y$

$$M_y = (M_2 + \nu M_1) P \quad (\text{daNm/m})$$

- $M_1$  donné par un graphe en fonction de  $\alpha = \frac{l_x}{l_y}, \frac{u}{l_x}$  et  $\frac{v}{l_y}$
- $M_2$  donné par un graphe en fonction de  $\alpha = \frac{l_x}{l_y}, \frac{u}{l_x}$  et  $\frac{v}{l_y}$

La remarque concernant l'encastrement partiel des bords (cas des plaques chargées uniformément) reste valable.

D'une manière générale, on doit toujours avoir pour la portée  $l_x$  (BAEL 91, A .8.2.2) :

$$M_t + \frac{M_{aw} + M_{ae}}{2} \geq 1,25 M_{0x} \quad (1.7)$$

### Remarque

Les valeurs de  $u$  et  $v$  sont mesurées au niveau du feuillet moyen de la dalle après diffusion de l'effort à  $45^\circ$  (Fig. 1.5).

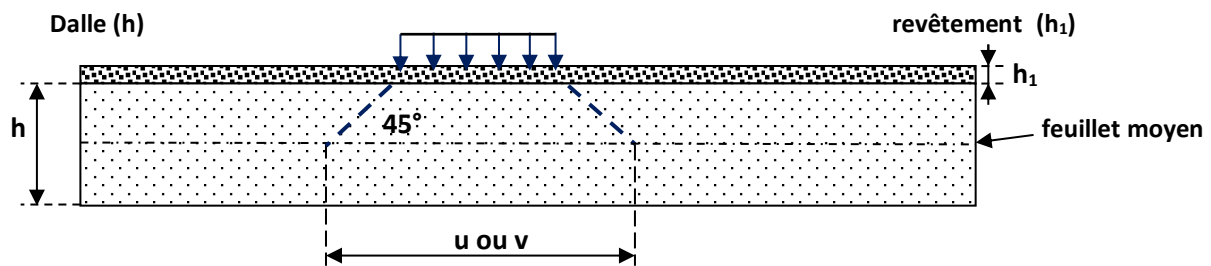


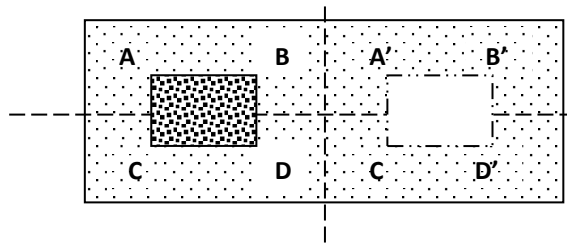
Figure 1.5: Dimensions du rectangle d'impact

L'effort tranchant par unité de longueur est donné par :

$$\text{Si } u > v \quad \begin{cases} \text{Au milieu de } u \rightarrow T = \frac{P}{2u+v} \\ \text{Au milieu de } v \rightarrow T = \frac{P}{3u} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\text{Si } u < v \quad \begin{cases} \text{Au milieu de } u \rightarrow T = \frac{P}{3v} \\ \text{Au milieu de } v \rightarrow T = \frac{P}{2v+u} \end{cases} \quad (1.9)$$

### 2.3.3. Cas des charges concentrées sur un rectangle non concentrique à la plaque



Ce cas se traite en considérant plusieurs combinaisons des surcharges.

Si  $P$  représente la valeur de la surcharge concentrée sur le rectangle de dimension  $u$  et  $v$ , la surcharge uniformément répartie sur ce rectangle est :

$$q = \frac{P}{u \times v}$$

Les abaques de Pigeaud (Annexe A1) permettent de traiter le problème comme si la plaque était surchargée suivant le rectangle concentrique  $AB'D'C$ .

Soient  $M'_x$  et  $M'_y$  du rectangle  $ABD'C'$ , et  $M''_x$  et  $M''_y$  les moments du rectangle  $BA'D'C$ .

Les moments de la plaque chargée suivant le rectangle  $ABCD$  sont :

$$M_x = \frac{M'_x - M''_x}{2} \leftrightarrow M_y = \frac{M'_y - M''_y}{2}$$

En procédant de la même façon, on peut traiter le cas d'une plaque chargée par un rectangle excentré par rapport aux deux axes de la plaque.

$$M_x = \frac{M_{x1} - M_{x2} - M_{x3} + M_{x4}}{4} \leftrightarrow M_y = \frac{M_{y1} - M_{y2} - M_{y3} + M_{y4}}{4}$$

L'évaluation des efforts tranchants s'effectuera de la même manière.

## 2.4. Calcul conforme au règlement BAEL 91 révisées 99

### 2.4.1. Cas des dalles rectangulaires avec $\alpha \leq 0,4$

Lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

- $\alpha = \frac{l_x}{l_y} \leq 0,4$
- Dalle uniformément chargée

La dalle se calcule comme si elle reposait sur deux appuis (les grands côtés  $l_y$ ). On dit que la dalle porte suivant un seul sens. Ce calcul s'effectue de la même manière que pour les poutres et avec les mêmes méthodes (règles forfaitaires, règles pour les planchers à fortes surcharges ou résistance des matériaux) en considérant une bande de dalle de largeur égale à 1m, de hauteur totale  $h$ , de portée  $l_x$  et soumise à la charge uniforme  $q$  (Fig. 1.6).

Parallèlement à  $l_y$ , on dispose une quantité d'armatures dites de répartition. Leur section doit être au moins égale au quart des armatures principales  $A_x$ , soit :  $\omega_y = 0,25 \omega_x$

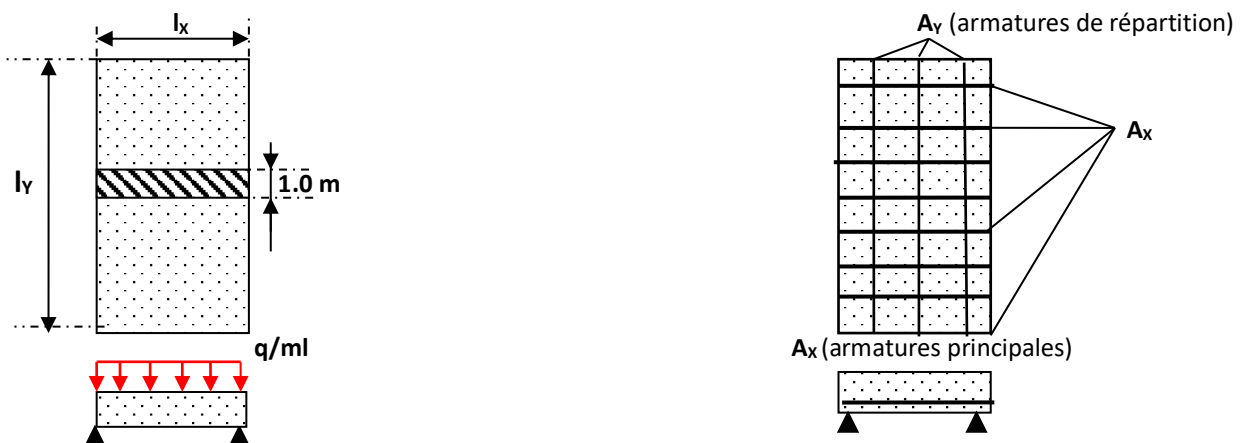


Figure 1.6: Ferrailage d'un panneau avec  $\alpha \leq 0.4$

## 2.4.2. Cas des dalles rectangulaires avec $\alpha > 0,4$

Une dalle est considérée comme portant suivant deux directions si :

- $0,4 < \alpha \leq 1$  et dalle uniformément chargée,
- Dalle soumise à des charges concentrées quel que soit le rapport des portées  $l_x$  et  $l_y$ .

La méthode de calcul proposée par l'annexe F3 des règles BAEL91 résulte de la méthode de calcul de M. Pigeaud. Cette annexe traite donc uniquement les panneaux rectangulaires uniformément chargés, articulés sur leur contour.

Les moments fléchissant au centre du panneau sont :

- Sens  $l_x \rightarrow M_{0x} = \mu_x q l_x^2$
- Sens  $l_y \rightarrow M_{0y} = \mu_y M_{0x}$

Les coefficients  $\mu_x$  et  $\mu_y$  (Tab. 1.1) sont donnés en fonction de  $\alpha$  pour 2 cas :

- $v = 0$  (état fissuré) hypothèse à retenir pour l'état limite ultime
- $v = 0,2$  (état non fissuré) hypothèse à retenir pour l'état limite de service

Tableau 1.1:  $\mu = f(\alpha)$

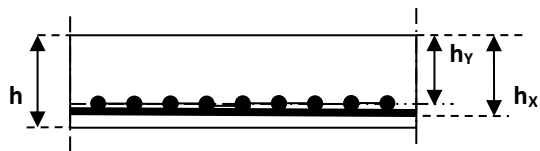
$\alpha = l_x/l_y$	$v = 0$		$v = 0,2$	
	$\mu_x = M_{0x} / q l_x^2$	$\mu_y = M_{0y} / M_{0x}$	$\mu_x$	$\mu_y$
<b>0,40</b>	0,110	*	0,112	0,293
<b>0,45</b>	0,102	*	0,105	0,333
<b>0,50</b>	0,095	*	0,098	0,373
<b>0,55</b>	0,088	*	0,092	0,420
<b>0,60</b>	0,081	0,305	0,086	0,476
<b>0,65</b>	0,0745	0,369	0,080	0,530
<b>0,70</b>	0,068	0,436	0,074	0,585
<b>0,75</b>	0,062	0,509	0,0685	0,643
<b>0,80</b>	0,056	0,595	0,063	0,710
<b>0,85</b>	0,051	0,685	0,058	0,778
<b>0,90</b>	0,046	0,778	0,053	0,846
<b>0,95</b>	0,041	0,887	0,043	0,923
<b>1,00</b>	0,037	1,000	0,044	1,000

\*Les valeurs de  $\mu_y < 0,25$  ne sont pas prises en considération étant donné que les armatures de flexion dans le sens de la grande portée  $l_y$  doivent être au moins égales en % au quart des armatures dans le sens  $l_x$ .

## 2.5. Calcul du ferrailage des dalles

### 2.5.1. Armatures de flexion

1) Les armatures de flexion sont calculées en considérant une bande de 1 mètre de largeur, et en utilisant les relations obtenues pour le calcul des poutres fléchies.



Dans le calcul des  $A_x$  (armatures disposées suivant le petit côté) et  $A_y$  (armatures parallèles au grand côté), il faut tenir compte du fait que la hauteur  $h_x$  est différente de  $h_y$ .

Dans tous les cas, la section des armatures de répartition  $A_y$  doit satisfaire les inéquations :

- $A_y \geq \frac{1}{4} A_x \rightarrow$  charges réparties
- $A_y \geq \frac{1}{3} A_x \rightarrow$  charges concentrées

2) L'espacement des armatures d'une même nappe ne doit pas dépasser les valeurs indiquées dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2: Espacement minimal

Direction	Charges réparties	Charges concentrées
La plus sollicitée	Min (3h - 33cm)	Min (2h - 22cm)
La moins sollicitée	Min (4h - 45cm)	Min (3h - 33cm)

#### Remarque

1. Si la dalle comporte, en plus des charges réparties, des charges concentrées, le projecteur doit apprécier l'interpolation à effectuer entre les deux cas.
2. L'épaisseur minimale d'une dalle coulée sur place est de 5 cm et dans le cas de dalle associée à des corps creux, l'épaisseur minimale est ramenée à 4 cm.
3. Le diamètre maximal des armatures est au plus égal au 1/10 de l'épaisseur totale de la plaque.
4. L'épaisseur d'une dalle doit respecter les inégalités suivantes :
  - $h \geq l_x/20$  pour un panneau isolé avec  $\alpha < 0,40$
  - $h \geq l_x/25$  pour un panneau continu avec  $\alpha < 0,40$
  - $h \geq l_x/30$  pour un panneau isolé avec  $\alpha \geq 0,40$
  - $h \geq l_x/40$  pour un panneau continu avec  $\alpha \geq 0,40$

#### 2.5.2. Armatures d'effort tranchant

Aucune armature d'effort tranchant (armature perpendiculaire au feuillet moyen de la dalle) n'est à prévoir si :

- La dalle ou poutre-dalle est bétonnée sans reprise sur toute sa hauteur.



- La contrainte tangente  $\tau_u$  due aux charges réparties est telle que :

$$\tau_u \leq 0,07 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \quad (\tau_u \leq 0,005 f_{cj} \text{ si } \gamma_b = 1,5) \quad (1.10)$$

- La condition de non fragilité fixant le pourcentage minimal d'armatures est respectée.
- Les moments de flexion en chaque point de deux sections normales perpendiculaires sont au moins dans les rapports suivants :

$$\frac{M_y}{M_x} \geq \frac{1}{4} \rightarrow \text{charges réparties}$$

$$\frac{M_y}{M_x} \geq \frac{1}{3} \rightarrow \text{charges concentrées}$$

Dans les autres situations, les armatures d'effort tranchant sont calculées conformément aux règles spécifiques aux états limites.

### 2.5.3. Armatures de poinçonnement

Dans le cas d'une force concentrée, la vérification de la résistance de la dalle au poinçonnement est indispensable.

#### 2.5.3.1. Rectangle d'impact

Toute force appliquée à la face supérieure de la dalle d'épaisseur  $h$  sur un rectangle d'impact de dimensions  $u_o \times v_o$  est supposée agir uniformément (après diffusion des charges suivant un angle de  $45^\circ$ ) au niveau du feuillet moyen sur un rectangle de dimensions  $u$  et  $v$  tel que (Fig.1.5) :

- $u = u_o + h$ , et  $v = v_o + h \rightarrow$  si la force est appliquée directement sur la dalle
- $u = u_o + h + \xi h_1$ , et  $v = v_o + h + \xi h_1 \rightarrow$  s'il existe un revêtement d'épaisseur  $h_1$

Avec  $\begin{cases} \xi = 2 \rightarrow \text{pour un revêtement en béton ou un matériau analogue} \\ \xi = 1,5 \rightarrow \text{pour un revêtement moins résistant que le béton (asphalte coulé, béton bitumineux, enrobé, etc.)} \end{cases}$

#### 2.5.3.2. Vérification de la résistance au poinçonnement

Aucune armature d'effort tranchant n'est requise si :

$$Q_u \leq \frac{0,045 \cdot u_c \cdot h \cdot f_{cj}}{\gamma_b} \quad (m, MN, MPa) \quad (1.11)$$

$Q_u$  : charge localisée à l'état limite ultime

$u_c$  : périmètre du rectangle d'impact [ $u_c = 2(u + v)$ ]

### Remarques

- 1) Les règlements (BAEL91, CBA93, ...) permettent de remplacer la valeur 0,045 h par  $(0,05 + 1,5 \rho_e)$  d lorsqu'il existe un ferrailage horizontal créant ainsi un effet favorable, et où :

$$\rho_e = \rho_{lx} \sqrt{\rho_{ly}} \rightarrow \rho_e \leq 0,015$$

$\rho_{lx}, \rho_{ly}$  = pourcentages d'armatures longitudinales suivant les sens x et y

- 2) Si la condition de non-poinçonnement n'est pas satisfaite, il faut placer des armatures d'effort tranchant sur un périmètre  $u_m$  défini à partir du périmètre  $u_c$  par une homothétie, et de sorte que la condition soit respectée dans  $u_m$ .

$$u_m = u_c \frac{\tau_u}{0,05 f_{cj}}$$

### 2.5.4. Disposition des armatures (Fig.1.7)

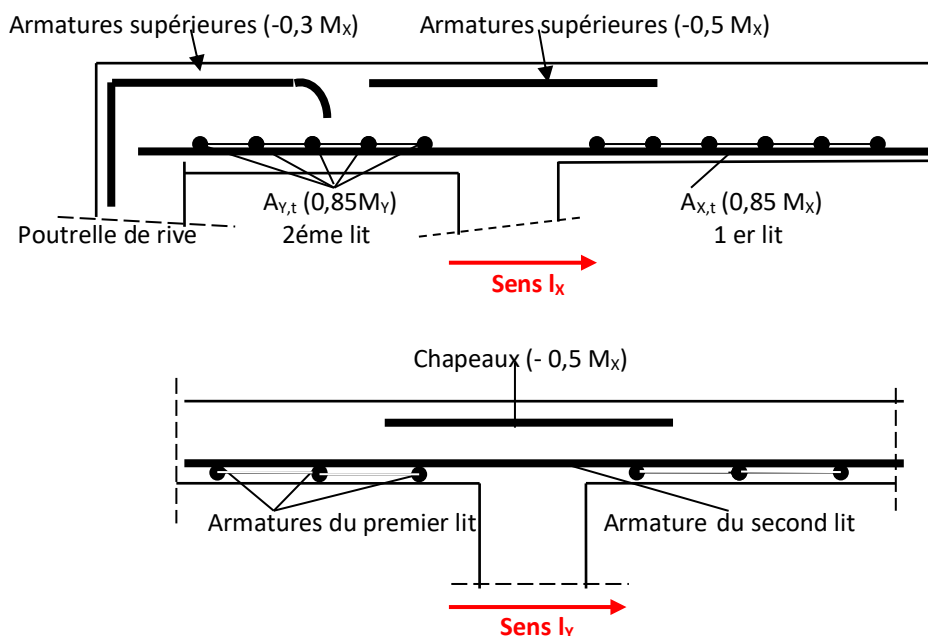


Figure 1.7: Disposition des armatures

### 2.5.5. Arrêt des barres

Dans le cas d'un panneau ABCD faisant partie d'une dalle continue ( $0,4 \leq l_x/l_y \leq 1$ ), on peut utiliser les deux méthodes d'arrêt forfaitaire suivantes :

#### 2.5.5.1. Première méthode

- 1) Chaque barre qui traverse le contour est totalement ancrée au-delà de celui-ci (longueur d'ancrage  $l_a \approx 40\phi$  pour les barres droites et  $16\phi$  pour les barres HA munies de crochets normaux).
- 2) Armatures inférieures : quadrillage uniforme sur toute la surface, une barre sur deux arrêtée à une distance  $b = l_x/10$  avant le nu d'appui (Fig.1.8a).

3) Armatures supérieures : section d'acier réalisée avec des barres décalées dépassant respectivement des longueurs  $l_1$  et  $l_2$  du nu d'appui tel que :

$$l_1 \geq \max [\lambda l_x ; l_a]$$

$$l_2 \geq \max [0,5 l_1 ; l_a]$$

Où :

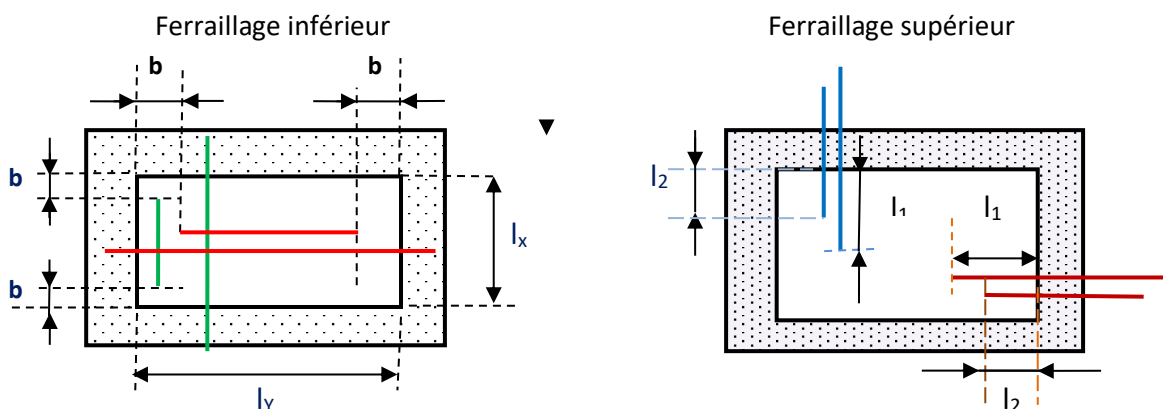
- $\lambda = 0,05 + 0,30 M_a/M_x$
- $l_a$  = longueur d'ancrage
- $M_a$  = moment sur appui

#### 2.5.5.2. Deuxième méthode

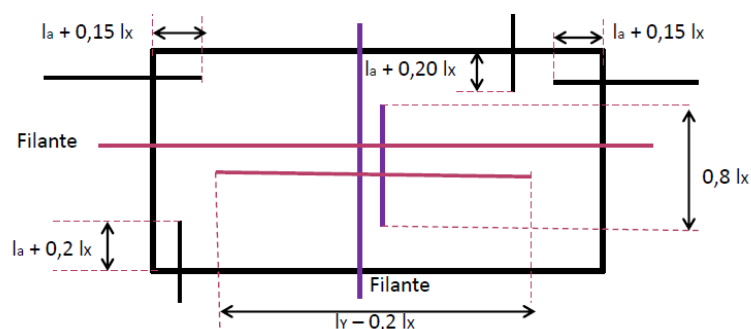
Les armatures d'un panneau de la dalle sont réparties comme ce qui suit :

- Armatures inférieures. Une barre sur deux est arrêtée à  $l_x/10$  avant le nu d'appui (quadrillage uniforme sur toute la surface).
- Armatures supérieures. La longueur d'un chapeau dans le cas de panneaux identiques est égale à (Fig.18b) :

$$L = 2 [l_a + 0,15 l_x \text{ (ou } 0,20 l_x)] + \text{épaisseur du nu}$$



(a) Première méthode



(b) Deuxième méthode

Figure 1.8: Arrêt des barres

### Remarque

Si la dalle présente des ouvertures ou trémies, il faut disposer dans les deux directions une quantité d'armatures équivalente à la section coupée. La transmission des efforts des barres coupées vers celles du renfort se fait par des bielles inclinées à 45°, la longueur des barres de renfort est donc prise égale à :  $u + v + 2 l_s$  ( $u$  et  $v$  étant les dimensions de la trémie et  $l_s$  longueur de scellement droit).

## 2.6. Vérification des déformations

Les déformations des dalles, des poutres principales et secondaires doivent rester assez faibles pour éviter des désordres importants au niveau des revêtements de sol, des plafonds, des cloisons, ou tout autres éléments supportés par l'ossature du bâtiment. L'état limite à prendre en considération est généralement l'état de déformation, et non pas l'état de rupture.

## 2.7. Condition de non fragilité

Pour les dalles rectangulaires s'appuyant sur 4 côtés et soumises à la flexion simple, il faut une quantité d'armatures au moins égale à :

$$\text{Sens } l_y \rightarrow A_{y,\min} (\text{cm}^2/\text{m}) = \begin{cases} 12 h & (\text{pour ronds lisses}) \\ 8 h & (\text{FeE 400}) \\ 6 h & (\text{FeE 500 ou TS}) \end{cases}$$

$$\text{Sens } l_x \rightarrow A_{x,\min} (\text{cm}^2/\text{m}) = A_{y,\min} (3 - \alpha)/2$$

### Remarques

$$\text{a) Si } \begin{cases} \rho_0 = \begin{cases} 0,0012 \\ 0,0008 \\ 0,0006 \end{cases} \\ \rho_x = \frac{A_x}{b h} \\ \rho_y = \frac{A_y}{b h} \end{cases}$$

Alors, on doit avoir :

- $\rho_x \geq \left(\frac{3-\alpha}{2}\right) \rho_0$
- $\rho_y \geq \rho_0$
- $\rho_0$  peut aussi être calculé en utilisant la relation suivante :  $\rho_0 = 0,23 \frac{f_{tj}}{f_e}$

b) Epaisseur  $h$  des dalles

$$l_x/50 \leq h \leq l_x/30$$

Cette condition permet de se dispenser des vérifications concernant l'état limite de déformation prévues par le règlement BAEL (B.7.5).

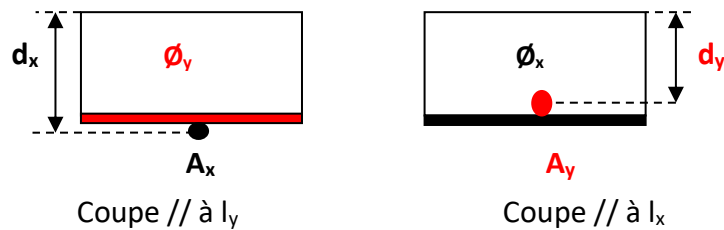
c) Hauteur utile  $d$

La hauteur utile est propre à chacune des deux directions, soit :

- $d_x$  pour le sens  $l_x$
- $d_y$  pour le sens  $l_y$

En général, on a :

$$d_y = d_x - \frac{\phi_x + \phi_y}{2}$$



d) Sections  $A_x$  et  $A_y$

La section  $A_x$  est déterminée pour équilibrer  $M_x$

- Si la fissuration est peu préjudiciable,  $M_x$  correspond à l'état limite ultime :

$$M_x = M_{x, \text{ultime}}$$

- Si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable,  $M_x$  correspond à l'état limite de service :

$$M_x = M_{x, \text{service}} \rightarrow \begin{cases} \phi_x \geq 6 \text{ mm si la fissuration est préjudiciable} \\ \phi_x \geq 8 \text{ mm si la fissuration est très préjudiciable} \end{cases}$$

$A_y$  est déterminée de la même manière que  $A_x$ , avec en plus :

- Dans le cas où, parmi les charges appliquées, il y a des charges localisées.

$$A_y \geq \frac{A_x}{3} \times \frac{d_x}{d_y} \rightarrow M_y \geq \frac{M_x}{3} \quad (1.12)$$

- Dans le cas où il n'y a que des charges réparties.

$$A_y \geq \frac{A_x}{4} \times \frac{d_x}{d_y} \rightarrow M_y \geq \frac{M_x}{4} \quad (1.13)$$

- Dans le cas de charges localisées mobiles, les sections  $A_x$  et  $A_y$  doivent être conservées dans leur totalité jusqu'aux appuis

### 3. POUTRES DE PLANCHERS

#### 3.1. Essais de poutres en béton armé

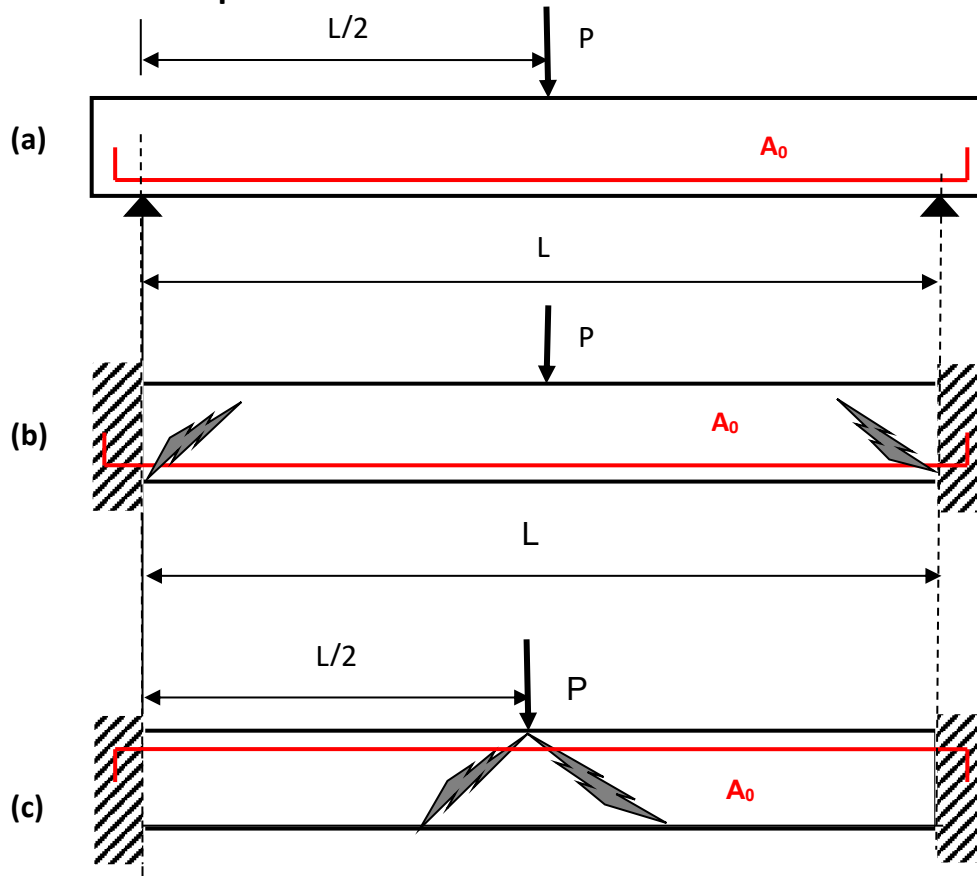


Figure 1.9: Phénomène d'adaptation

1) Considérons la poutre isostatique représentée plus haut (Fig.1.9a). Elle est soumise à une charge concentrée  $P$  croissante à mi- portée. Soit  $A_0$  la section d'acier en travée. À la

rupture :  $P = P_u \rightarrow M_u = \frac{P_u L}{4}$

2) Soit la même poutre (Fig. 1.9b) mais encastrée et armée avec une même section  $A_0$  d'armatures inférieures.

- À la fissuration, on se retrouve avec une poutre sur deux appuis simples.
- À la rupture :  $P = P_u \rightarrow M_u = \frac{P_u L}{4}$

3) Même poutre (Fig. 1.9c) encastrée mais avec une section d'armatures supérieures  $A_0$ .

- Après fissuration, on obtient deux consoles nez à nez.
- À la rupture des deux consoles, la charge  $P = P_u \rightarrow M_u = \frac{P_u}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{P_u L}{4}$

Par conséquent, la charge de rupture, identique pour les trois cas, ne dépend que de la section  $A_0$  (section correspondant au comportement isostatique de la poutre) quel que soit la position de la section d'acier  $A_0$ .

Cela veut dire, qu'il existe une certaine marge de sécurité permettant le transfert partiel de moments des appuis vers la travée et réciproquement (sans compromettre la sécurité), si on adopte une quantité d'armatures (Fig. 1.10) respectant l'inégalité suivante :

$$A_t + \frac{A_w + A_e}{2} \geq A_0 \quad (1.14)$$

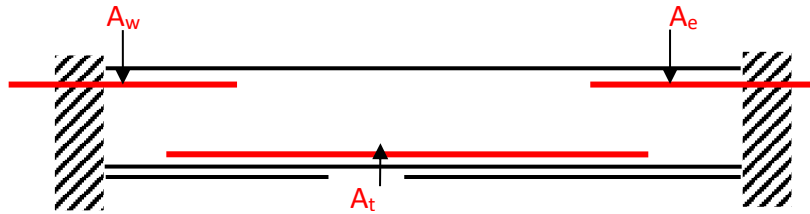


Figure 1.10: Phénomène d'adaptation des sections

Si l'on multiplie cette inégalité par  $z_b \times \sigma_s$ , on obtient, sachant que  $M = A \times z_b \times \sigma_s$  :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq M_0 \quad (1.15)$$

D'autre part, dans la phase des grandes déformations, la partie principale de la flèche a pour origine les rotations importantes où se va se produire la rupture (Fig. 1.11).

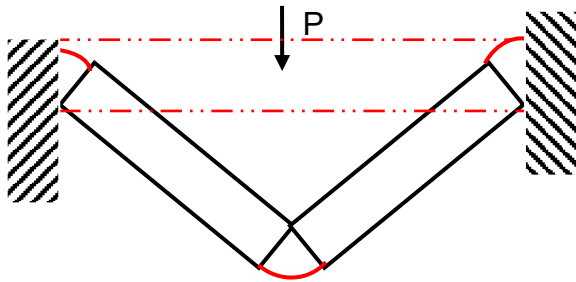


Figure 1.11: Rotation des sections

A partir de ce constat, on peut en conclure qu'une poutre en béton armé se comporte comme elle a été calculée. La fissuration des sections les moins armées permet une distribution des moments qui diffère de la distribution théorique : c'est ce que l'on appelle *le phénomène d'adaptation entre sections*.

Par conséquent, il est possible d'appliquer aux poutres de planchers en béton armé des méthodes de calcul différentes des méthodes de continuité théoriques et de limiter l'influence des charges aux travées voisines de celle étudiée\*.

Deux méthodes simplifiées de calcul des poutres continues des planchers sont basées sur ce principe, à savoir :

- La méthode forfaitaire applicable aux planchers à charge d'exploitation modérée.
- La méthode de Caquot applicable aux planchers à charge d'exploitation élevée.

**\* Remarque : Effet de la continuité sur les structures en béton armé**

Après durcissement, les constructions en béton armé deviennent monolithiques. Par conséquent, une charge appliquée en un point quelconque d'une structure aura des répercussions plus ou moins significatives sur l'ensemble de ses éléments constitutifs (Fig.1.12).

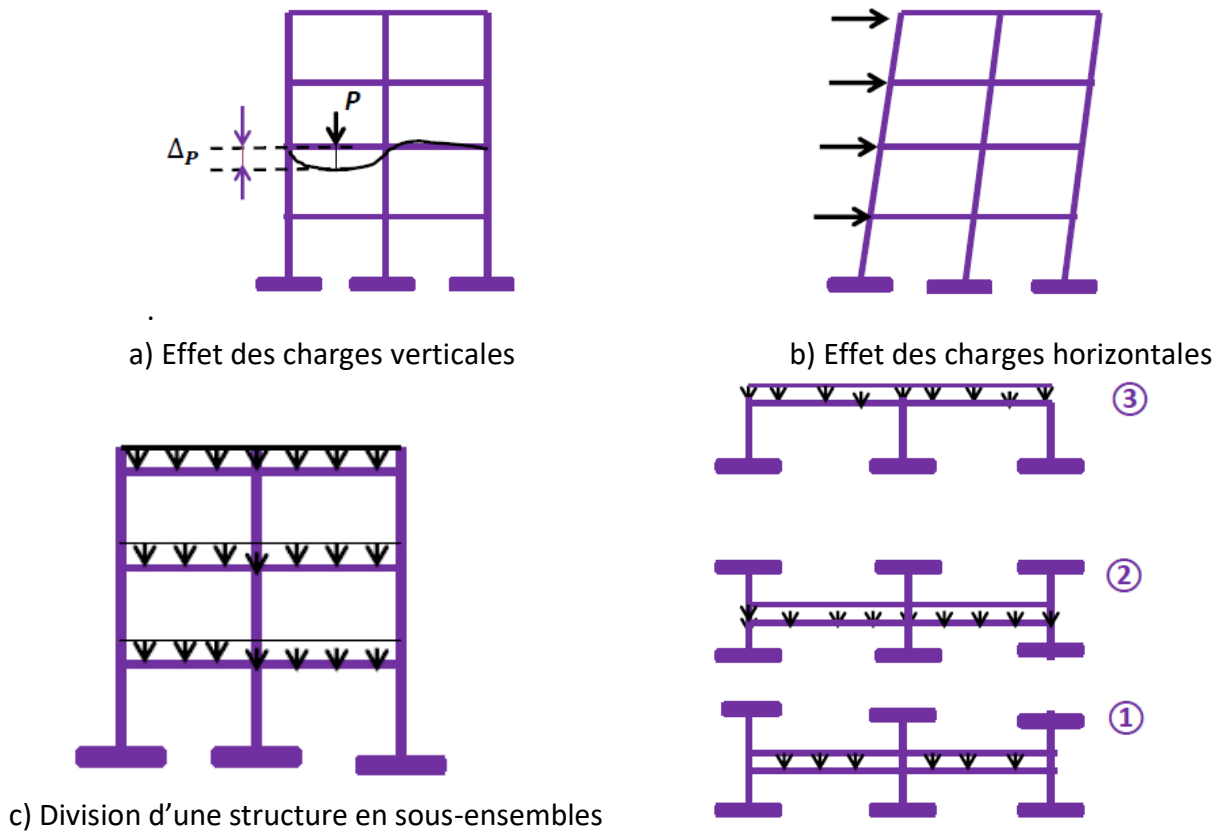


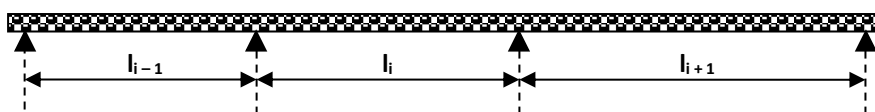
Figure 1.12: Effet de la continuité sur les structures en béton armé

## 3.2. Planchers à charge d'exploitation modérée : Méthode forfaitaire

### 3.2.1. Domaine d'application

La méthode forfaitaire de calcul des poutres s'applique si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) La charge d'exploitation est au plus égale à deux fois la charge permanente ou à  $5000 \text{ N/m}^2$  :  
 $q \leq 2 \text{ g}$  et  $q \leq 5 \text{ kN/m}^2$
- 2) Les éléments de planchers ont une même inertie dans les différentes travées.
- 3) Les portées successives vérifient les rapports suivants :



$$0,8 \leq l_i / l_{i-1} \leq 1,25$$

$$0,8 \leq l_i / l_{i+1} \leq 1,25$$



4) La fissuration ne compromet pas la tenue des revêtements ni celle des cloisons.

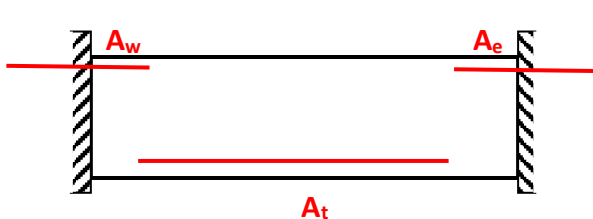
Dans le cas où l'une au moins des 4 conditions précédentes n'est pas vérifiée, on peut appliquer la méthode de calcul des planchers à charge d'exploitation relativement élevée (méthode de Caquot).

### Remarque

En pratique, la méthode forfaitaire est généralement applicable aux bâtiments à usage d'habitation ou de bureaux, aux écoles, aux hôpitaux, et souvent aux magasins, salles de spectacles, constructions pour lesquelles les conditions précédemment énumérées sont, la plupart du temps, respectées.

### 3.2.2. Principe de la méthode

Les essais sur des poutres en béton armé soumises à la flexion simple ont montré que :



$$A_t + \frac{(A_w + A_e)}{2} \geq A_0$$

Le principe est basé sur le phénomène d'adaptation des sections, c'est-à-dire, autoriser des transferts de moments entre les sections sur appuis et en travée et réciproquement (redistribution des efforts) en adoptant un coefficient  $k > 1$ . Soit :

$$M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq k M_0$$

$k$  : coefficient fonction du rapport des charges d'exploitation et permanentes

### 3.2.3. Application de la méthode

Soit,  $\alpha$  le rapport des charges d'exploitation à la somme des charges permanentes et d'exploitation :

$$\alpha = \frac{q}{(q + g)}$$

Les valeurs extrêmes de  $q$  sont :

$$q = 0 \text{ et } q = 2g \text{ (condition 1)}$$

Les valeurs de  $\alpha$  sont donc comprises entre 0 et 2/3. Le tableau 1.3 regroupe quelques valeurs numériques des coefficients de  $M_0$  en fonction de  $\alpha$ .

Tableau 1.3: Coefficient de  $M_0$  en fonction de  $\alpha$

	$q = g/5$	$q = g/4$	$q = g/2$	$q = g$	$q = 2g/3$	$q = 2g$
$\alpha$	1/6	1/5	1/3	1/2	3/5	2/3
$1+0,3\alpha$	1,05	1,06	1,10	1,15	1,18	1,20
$(1+0,3\alpha)/2$	0,525	0,53	0,55	0,575	0,59	0,60
$(1,2+0,3\alpha)/2$	0,625	0,63	0,65	0,675	0,69	0,70

Dans la relation précédente ( $M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq k M_0$ ), on a :

- $M_0$  représente le moment maximal dans la travée de comparaison (ou de référence). C'est la travée isostatique soumise aux mêmes charges et de même portée que la travée étudiée (Fig. 1.13).

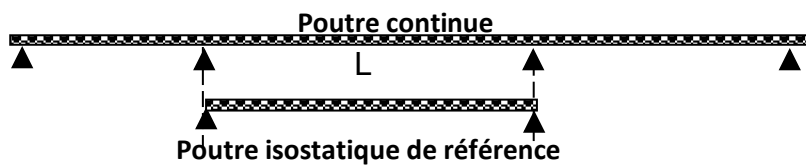


Figure 1.13: Travée de comparaison

- $M_w$  et  $M_e$  les valeurs absolues des moments sur l'appui de gauche et sur l'appui de droite de la travée continue.
- $M_t$  le moment maximal dans la travée continue.

Les valeurs prises pour  $M_t$ ,  $M_w$  et  $M_e$  doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$1) \quad M_t + \frac{M_w + M_e}{2} \geq \max \begin{cases} (1 + 0,3 \alpha) M_0^* \\ 1,05 M_0 \end{cases} \quad (1.16)$$

\* $(1 + 0,3 \alpha) \geq 1,05$  si  $\alpha \geq 1/6 \rightarrow q \geq g/5$ . Aussi, la première condition est, en général, déterminante.

$$2) \quad M_t \geq \frac{1 + 0,3 \alpha}{2} M_0 \rightarrow \text{Pour une travée intermédiaire} \quad (1.17)$$

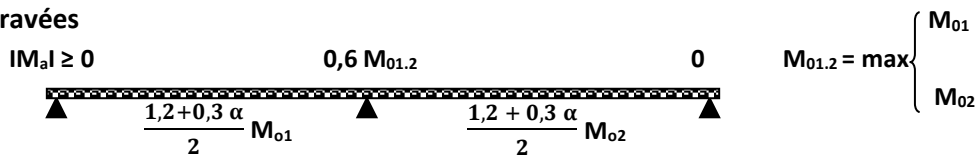
$$3) \quad M_t \geq \frac{1,2 + 0,3 \alpha}{2} M_0 \rightarrow \text{Pour une travée de rive} \quad (1.18)$$

3) La valeur absolue de chaque moment sur appui intermédiaire doit être au moins égale à :

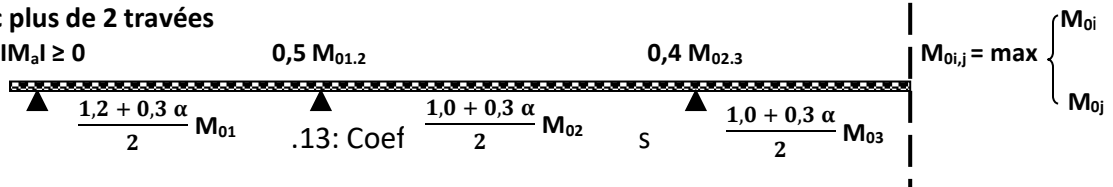
$$|M_a| \begin{cases} 0,6 M_0 \rightarrow \text{Pour une poutre à deux travées} \\ 0,5 M_0 \rightarrow \text{Pour les appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées} \\ 0,4 M_0 \rightarrow \text{Pour les autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées} \end{cases}$$

Les coefficients forfaitaires sont représentés ci-dessous.

#### Poutre à 2 travées



#### Poutre avec plus de 2 travées



#### Remarque

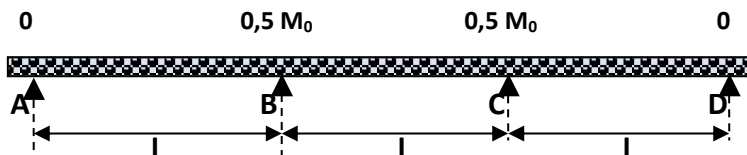
Dans le cas où l'appui de rive est solidaire d'un poteau ou d'une poutre, il est nécessaire de disposer sur cet appui des armatures supérieures pour équilibrer un moment au moins égal à :

$$M_a = -0,15 M_0$$

#### Application 1

Il s'agit de calculer les moments en travée et sur appuis de la poutre continue ci-dessous soumise aux charges suivantes :

$$g = 2 \text{ kN/m et } q = 4 \text{ kN/m} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3} \rightarrow 1 + 0,3 \alpha = 1,2 \\ \frac{1,2 + 0,3 \alpha}{2} = 0,7 \rightarrow \frac{1,0 + 0,3 \alpha}{2} = 0,6 \end{array} \right.$$



- A et D appuis simples :  $M_A = 0$  et  $M_D = 0$
- $M_B = 0,5 M_0$ , pour la première travée, on a :

$$M_t + \frac{0 + 0,5 M_0}{2} \geq 1,2 M_0 \quad \text{soit} \quad M_t \geq 0,95 M_0$$

$$M_t \geq 0,7 M_0$$

La valeur à retenir est donc :  $M_t = 0,95 M_0$

$M_B = M_C = 0,5 M_0$ , ce qui donne pour la travée centrale :

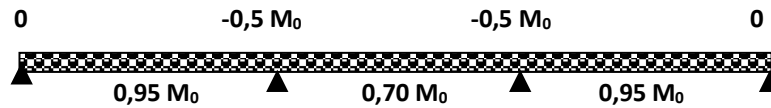
$$M_t + \frac{0,5 M_0 + 0,5 M_0}{2} \geq 1,2 M_0 \rightarrow M_t \geq 0,70 M_0$$

$$M_t \geq 0,6 M_0$$

Nous retiendrons la valeur :

$$M_t = 0,70 M_0.$$

Les valeurs obtenues sont représentées sur la figure ci-dessous :



### 3.2.4. Transmission des charges

La transmission des charges des dalles aux poutres peut se faire en utilisant les deux méthodes suivantes :

- La méthode des lignes de rupture.
- La méthode de Pigeaud.

#### 3.2.4.1. Méthode des lignes de rupture

Les lignes de rupture d'une dalle encastrée sur son pourtour forment un angle de  $45^\circ$  avec les rives de la dalle et sont parallèles à son grand côté (Fig. 1.14). Par commodité, lors des calculs, les charges triangulaires et trapézoïdales sont remplacées par des charges uniformes équivalentes par unité de longueur. Soit :

- $P_V$  = charge uniforme équivalente pour le calcul des efforts tranchants
- $P_M$  = charge uniforme équivalente pour le calcul du moment fléchissant

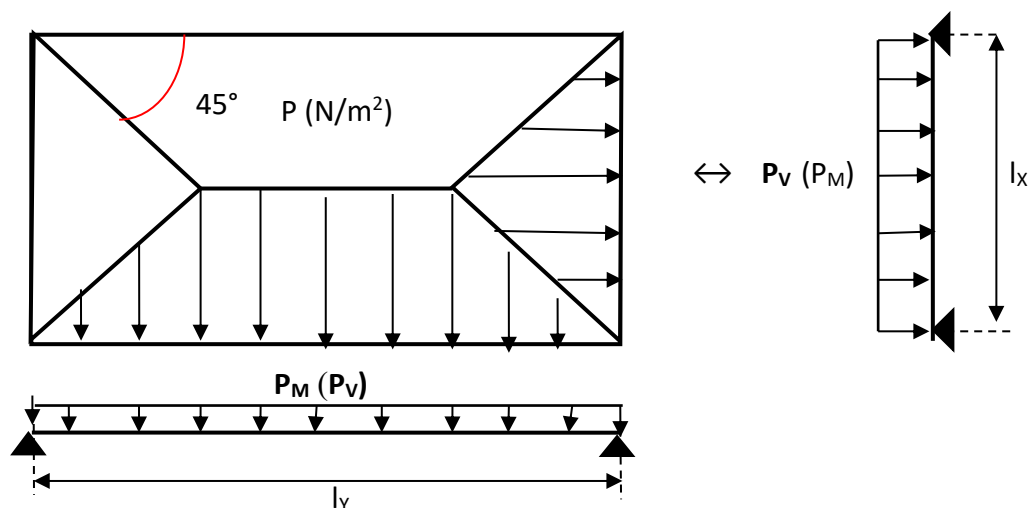


Figure 1.14: Transmission des charges

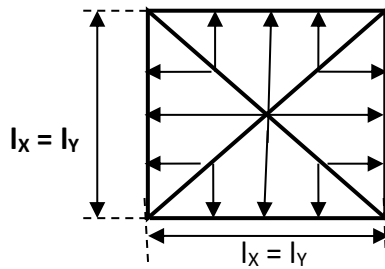
Pour une dalle rectangulaire, les expressions de  $P_M$  et  $P_V$  figurent dans le tableau 1.4.

Tableau 1.4: Charges uniformes équivalentes

Élément	Trapèze	Triangle
$P_V$	$(1 - \alpha/2) \frac{pl_x}{2}$	$\frac{pl_x}{4}$
$P_M$	$(1 - \alpha^2/3) \frac{pl_x}{2}$	$\frac{pl_x}{3}$

## Remarques

1) Quand  $\alpha = 1$ , les charges trapézoïdales deviennent des charges triangulaires.

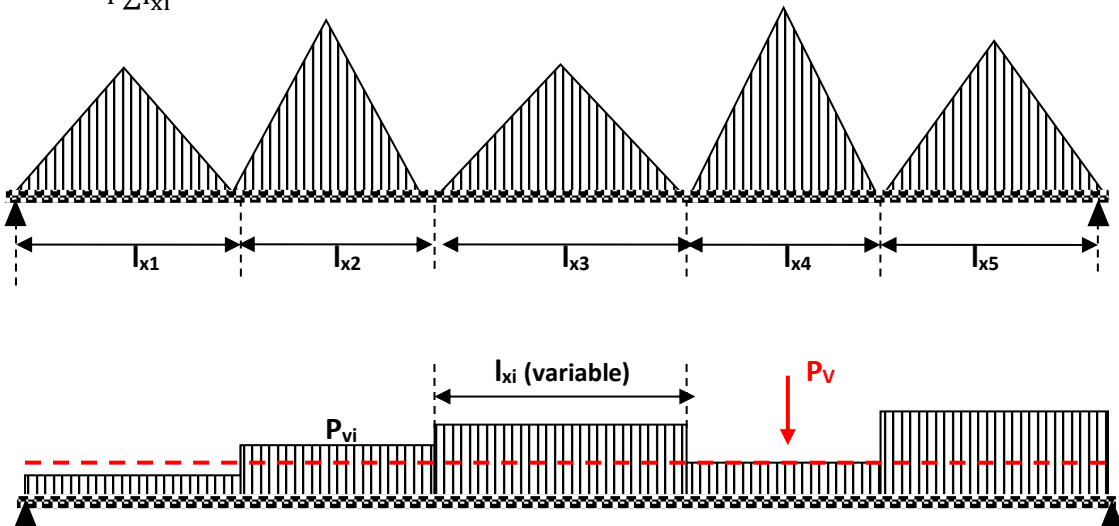


2) Pour deux panneaux situés de part et d'autre d'une poutre continue de plancher, les charges réparties s'ajoutent.

3) La charge en *dent de scie* peut être remplacée par une charge uniforme équivalente :

$$P_M = P_V = P \frac{\sum l_{xi}^2}{2 \sum l_{xi}} \rightarrow \text{Pour une travée intermédiaire}$$

$$P_M = P_V = P \frac{\sum l_{xi}^2}{4 \sum l_{xi}} \rightarrow \text{Pour une travée de rive}$$

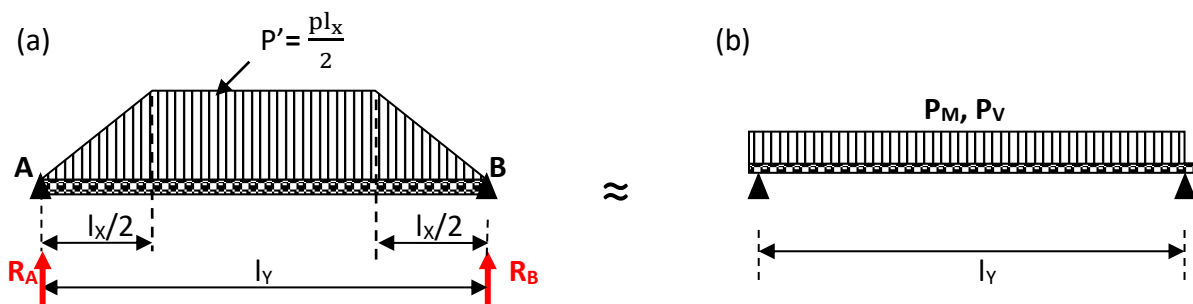


## Application 2

Il s'agit de retrouver les charges uniformes équivalentes données au tableau 1.4.

## Démonstration

### 1) Charges trapézoïdales



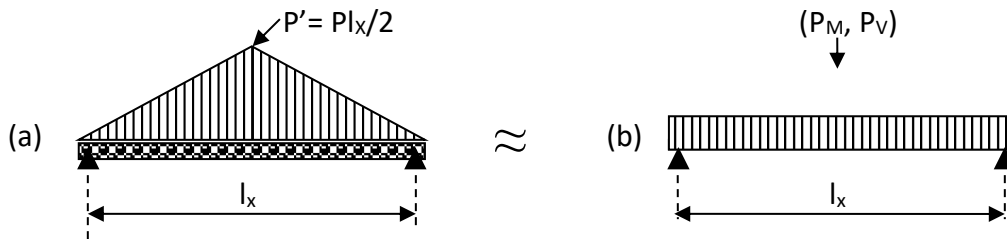
- Effort tranchant

$$\left. \begin{aligned} (a) \rightarrow V_A = -V_B &= \frac{1}{2} \left( P' l_y - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot P' \cdot \frac{p l_x}{2} \right) = \frac{p'}{2} \left[ l_y - \frac{l_x}{2} \right] = \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{p' l_y}{2} \\ (b) \rightarrow V_A = -V_B &= \frac{1}{2} P_V l_y \end{aligned} \right\} \rightarrow P_V = \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) P \frac{l_x}{2} \quad (1.19)$$

- Moment fléchissant

$$\left. \begin{aligned} (a) \rightarrow M_0 &= V_A \frac{l_y}{2} - P' \frac{\left( \frac{l_y}{2} - \frac{l_x}{2} \right)^2}{2} - \frac{1}{2} P' \frac{l_x}{2} \left( \frac{l_y}{2} - \frac{l_x}{3} \right) = P' \frac{l_y^2}{8} \left[ (2 - \alpha) - (1 - 2\alpha + \alpha^2) - \left( \frac{3\alpha - 2\alpha^2}{3} \right) \right] = \left( 1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) P' \frac{l_y^2}{8} \\ M_0 &= \left( 1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) P \frac{l_x}{2} \frac{l_y^2}{8} \\ (b) \rightarrow M_0 &= P_M \frac{l_y^2}{8} \end{aligned} \right\} \rightarrow P_M = \left( 1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) P \frac{l_x}{2} \quad (1.20)$$

2) Charges triangulaires

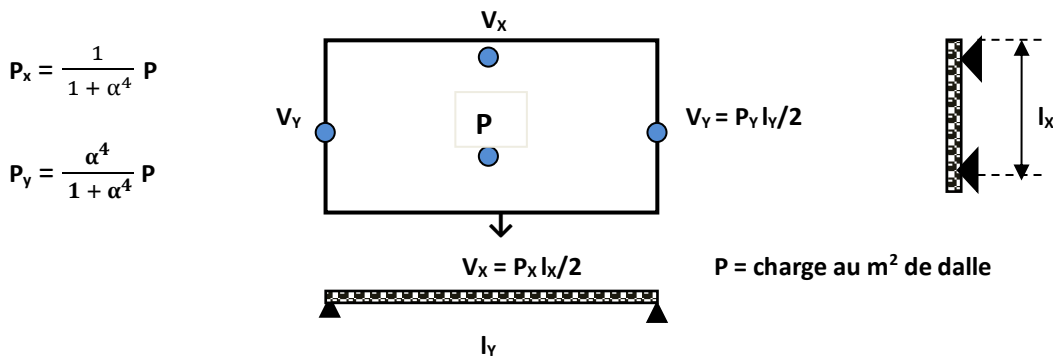


$$\left. \begin{aligned} (a) \rightarrow V_A = -V_B &= \left( \frac{p' l_x}{2} \right) / 2 = \frac{p' l_x}{4} = \frac{p l_x}{2} \frac{l_x}{4} \\ (b) \rightarrow V_A = -V_B &= P_V \frac{l_x}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow P_V = \frac{p l_x}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} (a) \rightarrow M_0 &= \frac{p' l_x}{4} \frac{l_x}{2} - \frac{1}{2} P' \frac{l_x}{2} \cdot \frac{l_x}{6} = \frac{p' l_x^2}{8} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{p' l_x^2}{12} = \frac{p l_x}{3} \frac{l_x^2}{8} \\ (b) \rightarrow M_0 &= P_M \frac{l_x^2}{8} \end{aligned} \right\} \rightarrow P_M = \frac{p l_x}{3} \quad (1.21)$$

3.2.4.2. Méthode de Pigeaud

Pour une dalle reposant simplement sur ses quatre côtés, le calcul élastique donne les efforts tranchants unitaires suivants :



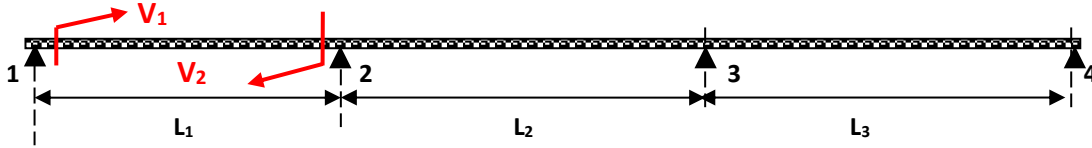
**Remarque**

La méthode Pigeaud correspond à un comportement de la dalle beaucoup plus théorique que réel. Pour cette raison, on lui préfère le plus souvent la méthode des lignes de rupture.

### 3.2.5. Effort tranchant

#### 1) Rappel : Evaluation de l'effort tranchant dans une travée de rive

Considérons la poutre continue suivante :



Soit  $V_{01}$  l'effort tranchant sur appui 1 ou 2 dans la travée de référence :

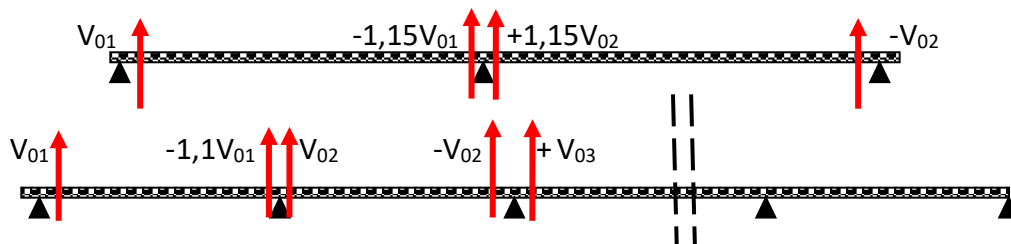
$$\left. \begin{array}{l} M_2 < 0 \\ M_1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{M_2 + M_1}{l_1} < 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_1 = V_{01} + \frac{(M_1 - M_2)}{l_1} \\ V_2 = V_{01} - \frac{(M_1 - M_2)}{l_1} \\ |V_2| > |V_{01}| \end{array} \right.$$

À partir de ces relations, on en déduit que l'effort tranchant d'une poutre continue est supérieur en valeur absolue à l'effort tranchant isostatique sur l'appui continu dans la travée de rive, et au plus égal à  $V_0$  ailleurs.

#### 2) Calcul des efforts tranchants

Pour le calcul des efforts tranchants, on admet la discontinuité sauf pour l'appui voisin de l'appui de rive où les efforts tranchants de la poutre de référence sont majorés de :

- 15 % pour les poutres à deux travées.
- 10 % pour les poutres à plus de deux travées.



### 3.2.6. Arrêt des barres

Les arrêts de barres se font généralement à partir du tracé des courbes enveloppes des moments obtenues en envisageant les différents cas de charges avec diverses combinaisons d'actions. Pour les poutres de planchers à charges d'exploitation modérées, on peut se dispenser du tracé de ces courbes si :

- La charge d'exploitation est au plus égale à la charge permanente :  $q \leq g$
- Les charges appliquées peuvent être considérées comme uniformément réparties.

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, les longueurs des chapeaux et arrêt des barres inférieures sont conformes à la Figure 1.15.

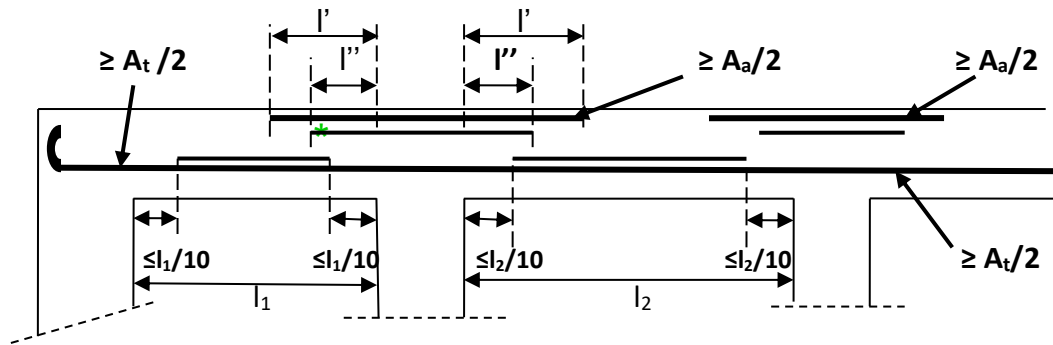
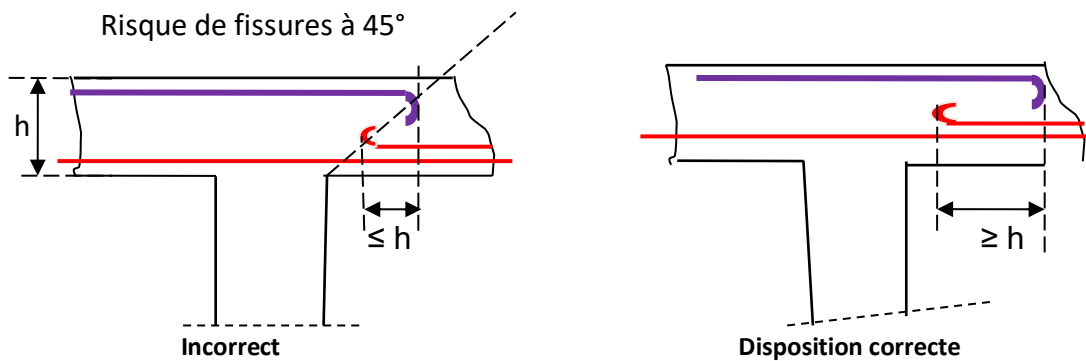


Figure 1.15: Arrêt forfaitaire

- Travée de rive :  $l' = \max [l_{1,2}/4, l_s] \rightarrow l_{i,j} = \max [l_i, l_j]$
- Travée intermédiaire :  $l' = \max [l_{i,j}/5, l_s]$
- Travée quelconque :  $l'' = \max [l'/2, l_s]$

#### Remarque



### 3.3. Planchers à charge d'exploitation élevée : Méthode de Caquot

#### 3.3.1. Domaine d'application

La méthode de calcul des planchers à charge d'exploitation élevée connue sous le nom de *Méthode de Caquot* s'applique dans les cas où :

- Les conditions indiquées au paragraphe 3.2.1 ne sont pas remplies.
- Les charges d'exploitation sont susceptibles de variation rapide dans le temps et en position avec :  $q > 2g$  ou  $q > 5 \text{ kN/m}^2$
- Les poutres sont associées à une dalle générale (section en T en travée).



### 3.3.2. Principe de la méthode

La méthode de Caquot est déduite de la *Méthode des trois moments* qu'elle simplifie et corrige pour tenir compte des effets suivants :

#### 3.3.2.1. Moments quadratiques

Les moments d'inertie des sections transversales varient en fonction de la variation de la largeur efficace de la dalle supérieure (table de compression), des arrêts de barres inférieures et supérieures (chapeaux sur appuis), et de l'influence limitée des moments sur appui au-delà des travées qui l'encadrent (théorie des foyers).

#### 3.3.2.2. Influence des charges

Les charges éloignées d'une travée donnée produisent sur celle-ci un effet négligeable. Les corrections simplificatrices sont :

- Coefficient 8,5 au lieu de 8 pour un chargement uniforme.
- Coefficient 2,125 au lieu de 2 pour des charges concentrées.
- Travées fictives à la place des travées réelles.

### 3.3.3. Moments sur appui

Le principe de la méthode de Caquot consiste à calculer le moment sur chaque appui d'une poutre continue en ne considérant que les travées qui encadrent l'appui choisi (Fig.1.16) : *c'est une méthode de continuité simplifiée*

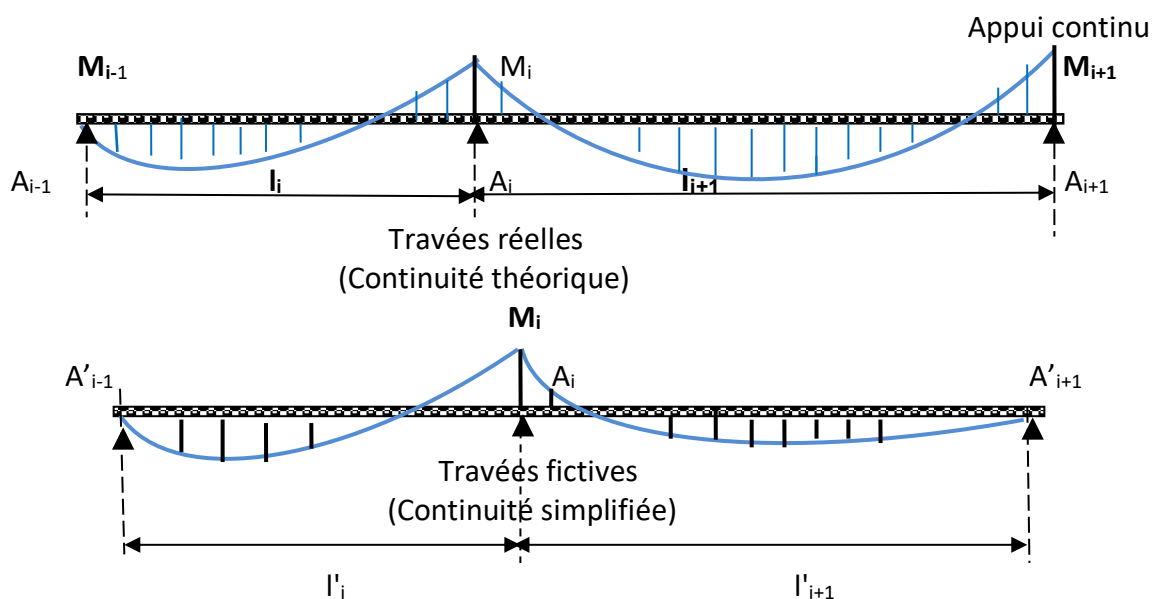
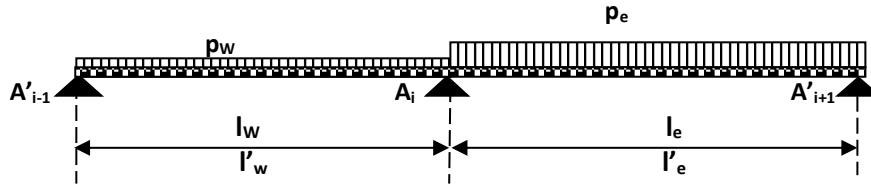


Figure 1.16: Principe de la méthode de Caquot

Les moments aux nus des appuis sont calculés en ne tenant compte que des charges des travées voisines de gauche (w) et de droite (e). De chaque côté des appuis, on détache des travées fictives, de longueur :

- $l'_i = l_i \rightarrow$  Pour les travées de rive sans porte-à-faux
- $l'_i = 0,8 l_i \rightarrow$  Pour les travées intermédiaires

### 3.3.3.1. Cas des charges réparties



On a :

$p_e$  : charge répartie par unité de longueur sur la travée à gauche de l'appui considéré

$p_w$  : charge répartie par unité de longueur sur la travée à droite de l'appui considéré

$I_e$  : moment d'inertie de la section de béton seul de la travée droite

$I_w$  : moment d'inertie de la section de béton seul de la travée gauche

Le théorème des trois moments, appliqué à l'appui  $A_i$ , donne :

$$\frac{I'_w}{6 EI_w} M_{i-1} + \left( \frac{I'_w}{3 EI_w} + \frac{I'_e}{3 EI_e} \right) M_i + \frac{I'_e}{6 EI_e} M_{i+1} = - \frac{p_w l_w'^3}{24 EI_w} - \frac{p_e l_e'^3}{24 EI_e}$$

Sachant que  $M_{i-1} = M_{i+1} = 0$ , on obtient :

$$2 \left( \frac{I'_w}{I_w} + \frac{I'_e}{I_e} \right) M_i = - \frac{p_w l_w'^2}{4} \times \frac{I'_w}{I_w} - \frac{p_e l_e'^2}{4} \times \frac{I'_e}{I_e}$$

Ce qui donne :

$$M_i = - \frac{p_w l_w'^2}{8} \times \frac{I'_w/I_w}{I'_w/I_w + I'_e/I_e} - \frac{p_e l_e'^2}{8} \times \frac{I'_e/I_e}{I'_w/I_w + I'_e/I_e}$$

En posant :

$$M'_w = \frac{p_w l_w'^2}{8,5} \rightarrow M'_e = \frac{p_e l_e'^2}{8,5}$$

8,5 au lieu 8 pour tenir compte de l'effet de la variation des inerties des sections de béton fissurées le long des travées (par exemple  $I_{travée} \neq I_{appui}$ )

$$K_w = \frac{I_w}{I'_w} \rightarrow K_e = \frac{I_e}{I'_e} \rightarrow D = K_w + K_e$$

Il vient :

$$M_i = - \left[ M'_w \frac{K_e}{D} + M'_e \left( 1 - \frac{K_e}{D} \right) \right] \quad (1.22)$$

### Cas particulier

Si  $I = I_w = I_e = \text{constant}$  (section non fissurée)

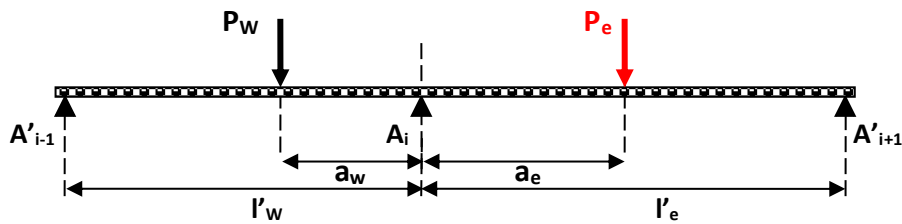
$$K_w = \frac{I}{I'_w} \rightarrow K_e = \frac{I}{I'_e} \rightarrow D = I \times \frac{I'_w + I'_e}{I'_w \times I'_e}$$

$$\frac{K_e}{D} = \frac{I'_w}{I'_w + I'_e} \rightarrow 1 - \frac{K_e}{D} = \frac{I'_e}{I'_w + I'_e}$$

On obtient :

$$M_i = - \frac{p_w l'_w{}^3 + p_e l'_e{}^3}{8,5 (I'_w + I'_e)} \quad (1.23)$$

### 3.3.3.2. Cas des charges concentrées



Le théorème des trois moments, appliqué à l'appui  $A_i$ , donne :

$$\text{Pour } P_e \rightarrow \frac{I'_w}{6EI_w} \cdot M_{i-1} + \left( \frac{l'_w}{3EI_e} + \frac{l'_e}{3EI_e} \right) M_i + \frac{l'_e}{6EI_e} M_{i+1} = - \frac{P_e a_e (l'_e - a_e)(2l'_e - a_e)}{6EI_e l'_e}$$

$M_{i-1} = M_{i+1} = 0$ . En simplifiant par  $6E$ , on obtient :

$$2 \left( \frac{l'_w}{I_w} + \frac{l'_e}{I_e} \right) M_i = - \frac{p_e l'_e{}^2}{I_e} \times \frac{a_e}{l'_e} \times \left( 1 - \frac{a_e}{l'_e} \right) \left( 2 - \frac{a_e}{l'_e} \right)$$

$$M_i = - \frac{1}{2} \times \frac{a_e}{l'_e} \times \left( 1 - \frac{a_e}{l'_e} \right) \left( 2 - \frac{a_e}{l'_e} \right) \times \frac{P_e l'_e l'_e / I_e}{l'_w / I_w + l'_e / I_e}$$

En posant :

$$k_w = \frac{1}{2,125} \times \frac{a_w}{l'_w} \times \left( 1 - \frac{a_w}{l'_w} \right) \left( 2 - \frac{a_w}{l'_w} \right) \rightarrow k_e = \frac{1}{2,125} \times \frac{a_e}{l'_e} \times \left( 1 - \frac{a_e}{l'_e} \right) \left( 2 - \frac{a_e}{l'_e} \right)$$

$$M'_w = \sum k_w P_w l'_w \rightarrow M'_e = \sum k_e P_e l'_e$$

$$K_w = \frac{I_w}{I'_w} \rightarrow K_e = \frac{I_e}{I'_e} \rightarrow D = K_w + K_e$$

$I_e$  et  $I_w$  : moments d'inertie de la section de béton seul

On obtient (pour  $P_e$  et  $P_w$ ) :

$$M_i = - M'_w \frac{K_e}{D} + M'_e \left( 1 - \frac{K_e}{D} \right) \quad (1.24)$$

Les valeurs de  $k_w$  et  $k_e$  ( $k$  et  $k_1$ ) sont données en fonction  $a/l'$  ( $a_w/l_w$  ou  $a_e/l_e$ ) à l'annexe 2.

### Cas particulier

Si,  $I_e = I_w = I = \text{constant}$ , il vient :

$$K_w = \frac{I}{I'_w} \rightarrow K_e = \frac{I}{I'_e} \rightarrow K_e/D = \frac{I'_w}{I'_w + I'_e} \rightarrow 1 - \frac{K_e}{D} = \frac{I'_e}{I'_w + I'_e} \rightarrow D = I \times \frac{I'_w + I'_e}{I'_w \times I'_e}$$

$$M_i = \frac{\sum K_e P_e l_e'^2 + \sum K_w P_w l_w'^2}{I'_w + I'_e} \quad (1.25)$$

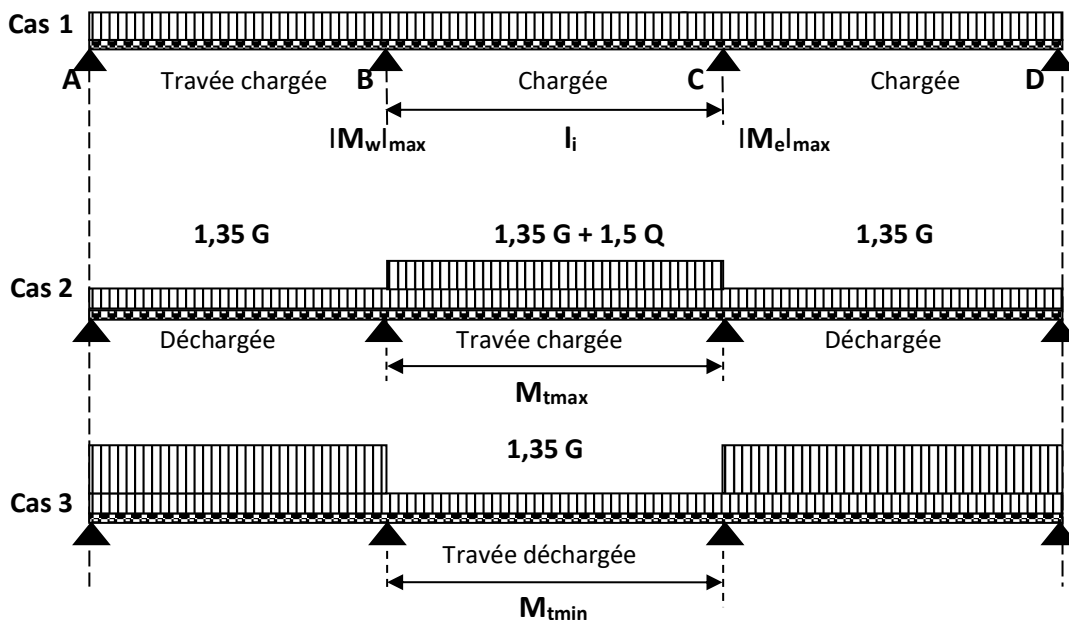
Si la poutre continue est soumise à des charges uniformément réparties et des charges concentrées, on superpose les résultats des deux effets.

### 3.3.3.3. Moments en travée

#### 1) Cas de charges

Les moments en travée sont calculés en tenant compte des travées réelles et non fictives (portée  $l$  et non  $l'$ ). Les différents cas de charges à prendre en considération pour l'état limite ultime sont :

**1,35 G + 1,5 Q**



#### Récapitulatif

Cas 1 : Chargement permettant de déterminer les moments maximums sur appui (travées encadrant l'appui chargées)

Cas 2 : Moment maximum en travée (chargement de la travée considérée)

Cas 3 : Moment minimum en travée (travée considérée déchargée)

#### 2) Tracé de la courbe enveloppe

On commence par tracer la courbe des moments de la travée indépendante de portée  $l$  sous l'effet :

- De la charge permanente.
- Des charges permanentes et d'exploitation.

Pour la ligne de fermeture, on prend en considération :

- Pour les moments positifs, la ligne qui joint les moments minimaux d'appui en valeur absolue.
- Pour les moments négatifs, celle qui joint les moments maximaux d'appuis en valeur absolue.

La courbe enveloppe des moments pour un chargement uniforme est représentée sur la figure 1.17.

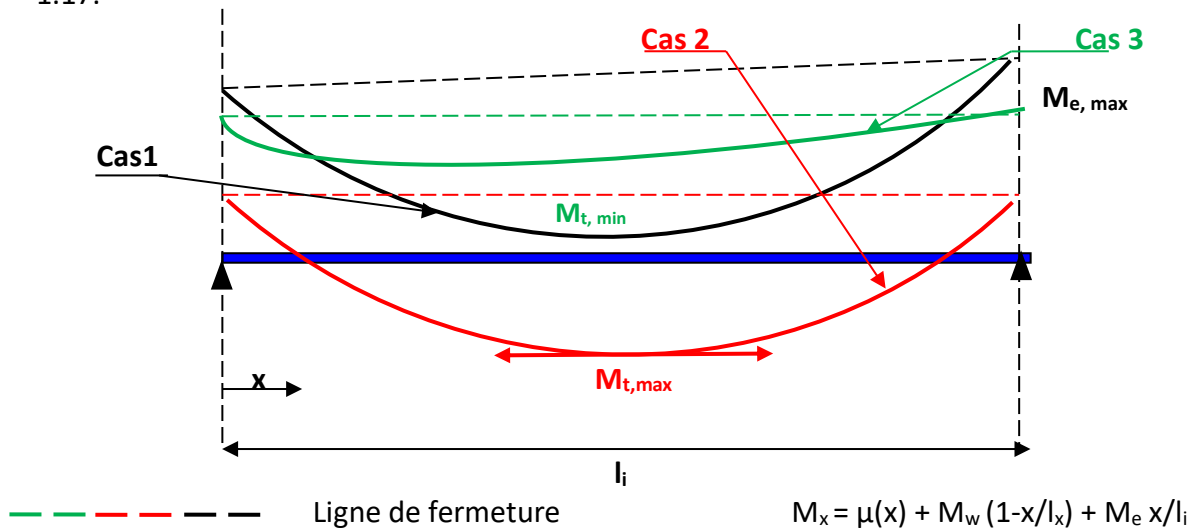


Figure 1.17: Courbe enveloppe

### 3.3.3.4. Efforts tranchants

Les efforts tranchants sont calculés conformément à la méthode générale applicable aux poutres continues en tenant compte des moments sur appui (moments de continuité).

$$V_{wi} = V_{ow} + \frac{(M_i - M_{i-1})}{l_{wi}} \quad \rightarrow \quad V_{ei} = V_{oe} + \frac{(M_{i+1} - M_i)}{l_{ei}} \quad (1.26)$$

Où,

$V_{ow}$  et  $V_{oi}$  : efforts tranchants sur appui  $A_i$  des travées de référence en valeur absolue

$M_{i-1}$ ,  $M_i$  et  $M_{i+1}$  : moments sur appuis avec leur signe

### Remarque

En général,  $V_u$  est maximal si les seules travées chargées sont celles qui encadrent l'appui considéré.

### 3.3.3.5. Arrêt des barres et vérification des appuis

#### 1) Rappel : Théorie de Morsch-Ritter

Le fonctionnement d'une poutre en béton armé soumise à la flexion peut se faire par analogie avec la poutre en treillis (Fig.1.18). En effet, si la fissuration devait se produire, elle se développerait suivant un angle d'environ 45° et les armatures d'âmes traversant cette fissure devraient l'empêcher de s'ouvrir en s'opposant à l'effort provoquant l'ouverture et qui n'est autre que l'effort tranchant  $V$ .

Le schéma de résistance ultime est le suivant :

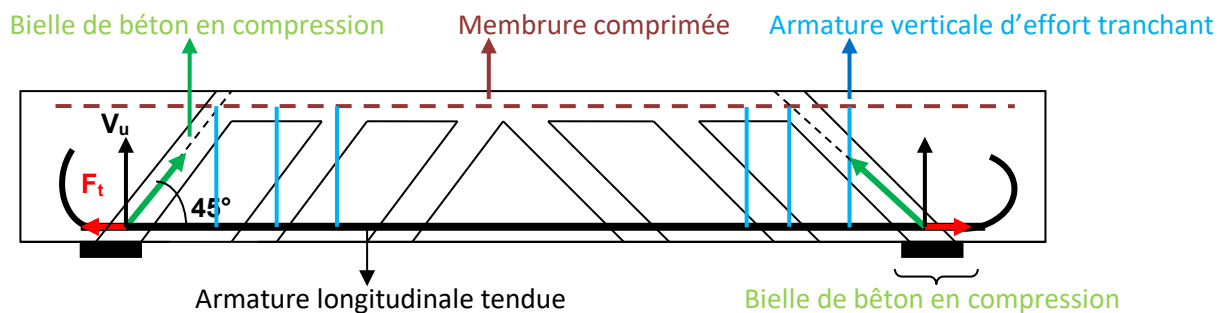


Figure 1.18: Comportement d'une poutre soumise à la flexion simple

L'équation d'équilibre de la bielle montre que (Fig.1.19) :

- Le béton de la bielle doit résister à un effort de compression  $V_u \sqrt{2}$ .
- Les armatures doivent résister à un effort de traction  $V_u$ . La section des armatures sur appui doit être suffisante.
- Les armatures doivent être ancrées pour résister à cet effort.

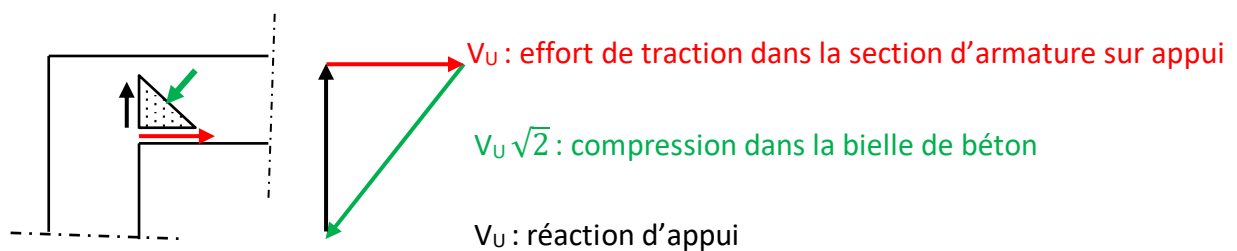


Figure 1.19: Equilibre de la bielle de béton

Les armatures longitudinales  $A_s$  doivent équilibrer  $F_t$ . Il faut donc :

$$A_s \times f_e / \gamma_s \geq V_u \rightarrow A_s \geq V_u \times \gamma_s / f_e$$

Pour tenir compte de la part de l'effort tranchant reprise par le béton comprimé (celle-ci diminue la contrainte devant être reprise par les armatures transversales), il faut tenir compte dans la formule précédente, non pas de la contrainte  $\tau_u$  (due à  $V_u$ ) mais plutôt d'une contrainte réduite :

$$\tau_u - 0,5 k \text{ (MPa)} \quad (1.27)$$

Où,

$k : 1 \rightarrow$  flexion simple

$k : 1 + 3 \times \sigma_{cm} / f_{cj} \rightarrow$  flexion composée avec compression

$\sigma_{cm} \rightarrow$  contrainte moyenne de compression de la section du béton sous l'effort normal de calcul

$k = 1 - 10 \times \sigma_{tm} / f_{cj} \rightarrow$  flexion composée avec traction

$\sigma_{tm}$ ; contrainte moyenne de traction de la section totale du béton sous l'effort normal de calcul

$k = 0 \rightarrow$  en cas de reprise de bétonnage ou lorsque la fissuration est jugée très préjudiciable

Par la suite, on choisit une section  $A_t$  pour une nappe et on détermine l'espacement maximal  $S_t$  en utilisant la formule suivante :

$$S_t \leq \frac{0,8 f_e A_t}{b_o(\tau_u - 0,5)} \quad (1.28)$$

## 2) Epure d'arrêt des barres à partir du tracé de la courbe des moments flechissants

La fissuration d'effort tranchant a une influence sur l'intensité de la traction qui sollicite les armatures longitudinales de la membrure tendue. Dans le cas d'un treillis simple, l'effort  $F$  de traction qui sollicite la membrure longitudinale à l'abscisse  $x$ , a même intensité à l'abscisse  $(x + z)$ . Cette particularité conduit à décaler de  $0,8h$ , dans le sens défavorable, les courbes enveloppes du moment fléchissant. Cette règle, dite de *décalage des moments*, ne majore pas le moment maximum, mais s'applique aux arrêts du second, voire du troisième lit d'armatures.

### Démonstration

a) Poutres soumises à un moment fléchissant  $M_x$  ( $M_U$  ou  $M_{Ser}$ ) et à un effort tranchant  $V_U$

Considérons les effets des sollicitations  $M_x$  et  $V_x$  dans les sections suivantes :

- $S(x)$  située à l'abscisse  $x$  du nu d'appui
- $S(x - z)$  située à l'abscisse  $(x - z)$

On suppose que dans ce qui suit que  $M(x) > M(x - z)$  et on étudie d'abord l'effet du moment seul (flexion pure), puis l'effet du moment et de l'effort tranchant (flexion simple).

- Effet du moment seul (Fig.1.20)

Hypothèse favorable : pas de cisaillement

Equilibre de la section  $S(x)$  :

$$M(x) = N_{bc} \times z = N_s \times z$$

Effort de traction dans les armatures  $A_s$  :

$$N_s = M(x)/z$$

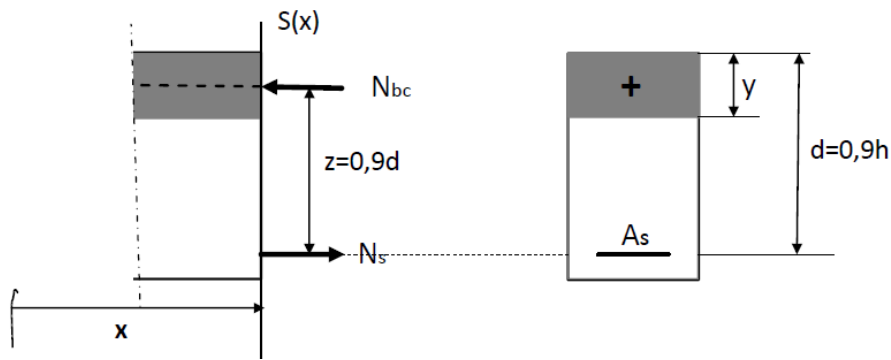


Figure 1.20: Section soumise à un moment de flexion

- Effet du moment et de l'effort tranchant (Fig.1.21)

Hypothèse défavorable retenue par le BAEL91 : béton fissuré

L'effort tranchant  $V(x)$  provoque dans la poutre des fissures que l'on admet rectilignes et inclinées à environ  $45^\circ$  sur l'axe longitudinal de la poutre.

L'équilibre exige dans la section d'abscisse  $(x - z)$  :

$$N_s = M(x)/z$$

L'effort de traction est donc égal à celui qui existe dans la section d'abscisse  $x$ .

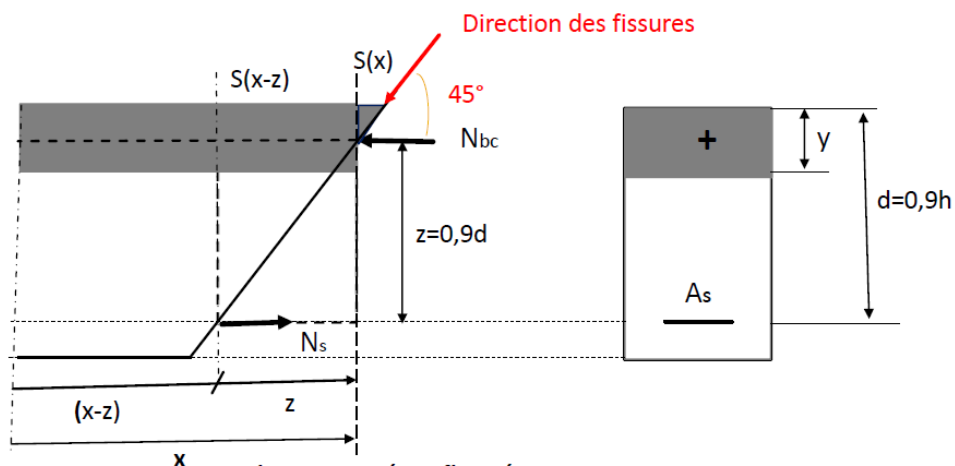


Figure 1.21: Béton fissuré

#### b) Règle de décalage

Il en résulte que l'effort de traction  $N_s$  dans les aciers est constant sur une longueur  $z$ . En d'autres termes,  $N_s$  à l'abscisse  $(x - z)$  est déterminé en tenant compte du moment  $M(x)$  dans la section d'abscisse  $x$ .

Pour tenir compte de ce décalage, le BAEL91 propose de décaler horizontalement de  $0,8h$  ( $z \approx 0,9d$  et  $d \approx 0,9h$ ) dans le sens défavorable la courbe des moments fléchissants. Cela revient donc à augmenter de  $2 \times 0,8h$  la longueur des armatures longitudinales (Fig.1.22).



Dans le cas d'une poutre sur deux appuis et uniformément chargée, on obtient l'épure d'arrêt des barres suivante :

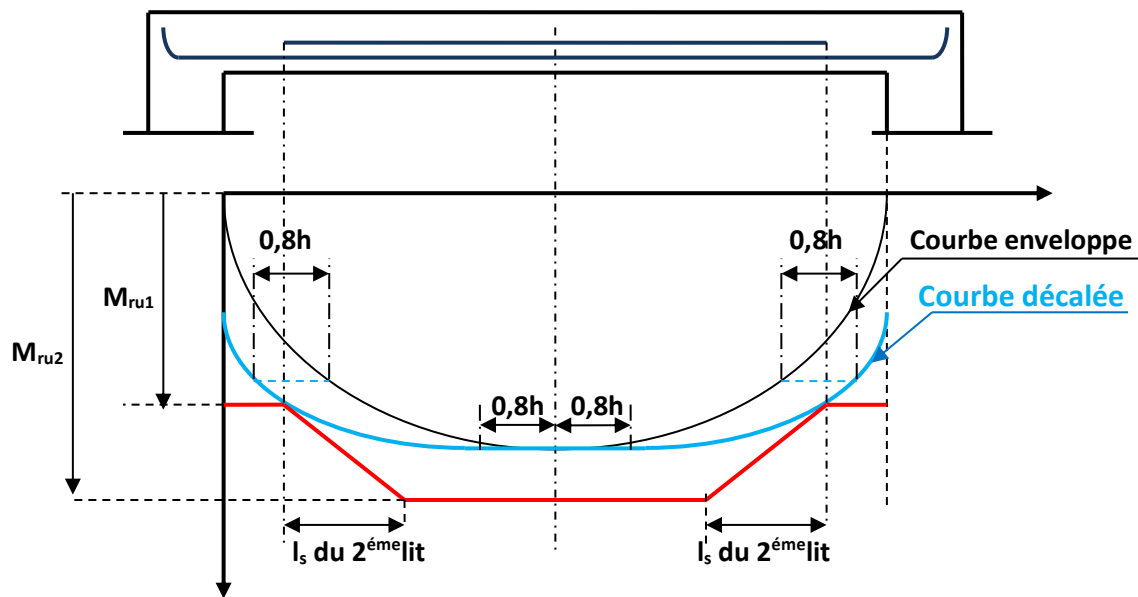


Figure 1.22: Epure d'arrêt des barres : Tracé de la courbe décalée

En résumé, pour obtenir l'épure d'arrêt des barres, il faut procéder comme suit :

- Déterminer la courbe des moments fléchissants.
- Décaler cette courbe des moments de  $0,8h$ .
- Calculer les moments résistants de chaque lit d'armatures.
- Tracer la courbe des moments résistants en tenant compte de la longueur de scellement droit des lits d'armatures et en ayant toujours des moments résistants supérieurs aux *moments décalés*.
- En déduire graphiquement ou analytiquement la longueur du ou des lits d'armatures qui seront arrêtées.

### 3) Règle pratique pour la répartition des cadres

Dans le cas d'une poutre soumise à une charge uniformément répartie, on peut prendre pour écartement des armatures transversales, la suite des nombres suivants (BAEL91 A.5, 1,22) :

7, 8, 9, 11, 13, 16, 20, 25, 30, 40 cm (maximum).

Le premier espace à retenir correspond à l'écartement à l'appui, et on répète ensuite chacun des nombres indiqués ci-dessus autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi-portée. Les cadres seront disposés symétriquement par rapport au milieu de la poutre.

#### 4) Vérification des appuis

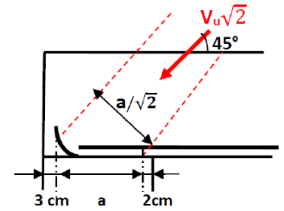
Il faut vérifier que la section d'armatures longitudinales qui arrive à l'appui est suffisante et que la compression dans la bielle de béton  $\sigma_{bc}$  est telle que :

$$\sigma_{bc} \leq 0,8 \frac{f_{c28}}{\gamma_b} \quad (1.29)$$

##### a) Vérification de la contrainte de compression dans la bielle

bielle de béton  $\sigma_{bc}$  est :

$$(b \times a)/\sqrt{2} \quad (1.30)$$



Où,

a : longueur de la bielle comprimée, généralement égale à la longueur d'ancrage des aciers longitudinaux moins 2 cm, et  $a \leq 0,9d$

##### b) Vérification de la section d'acier aux appuis (section minimale)

La section  $A_s$  qui arrive jusqu'aux appuis doit être telle :

$$A_s \geq V_U/f_{su} = \gamma_s V_U/f_e \quad (1.31)$$

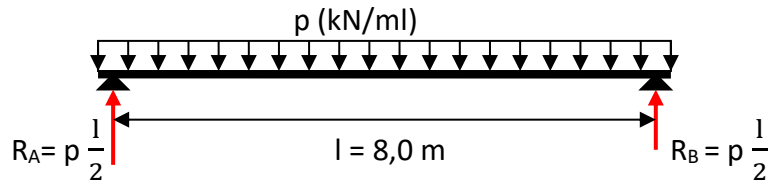
$$f_e/\gamma_s \longleftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \longrightarrow V_U$$

$A_s$

En pratique, la moitié des aciers nécessaires en travée est prolongée jusqu'aux appuis (généralement, c'est le premier lit).

## 4. EXEMPLE DE CALCUL D'UNE POUTRE ISOSTATIQUE

### 4.1. Enoncé



### 4.2. Données

#### 4.2.1. Dimensions de la poutre

- Largeur de la poutre :  $b = 0,30 \text{ m}$
- Hauteur de la poutre :  $h = 0,80 \text{ m}$
- Hauteur utile :  $d = 0,9h = 0,72 \text{ m}$
- Portée de la poutre :  $l = 8,0 \text{ m}$

#### 4.2.2. Charges et surcharges

- Charges permanentes :  $g = 20 \text{ kN/ml}$
- Charges d'exploitation :  $q = 5 \text{ kN/ml}$

#### 4.2.3. Matériaux

##### Béton

$$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$$

$$f_{t28} = 0,6 + 0,06 \times 25 = 2,1 \text{ MPa} \text{ (fissuration considérée peu préjudiciable)}$$

$$\gamma_b = 1,5 \text{ à l'état limite ultime}$$

$$f_{bu} = \frac{0,85 \times f_{c28}}{\gamma_b} = 14,17 \text{ MPa}$$

##### Acier

$$f_e = 500 \text{ MPa (type 1)}$$

$$\gamma_s = 1,15$$

$$f_{su} = 500/1,15 \approx 435 \text{ MPa}$$

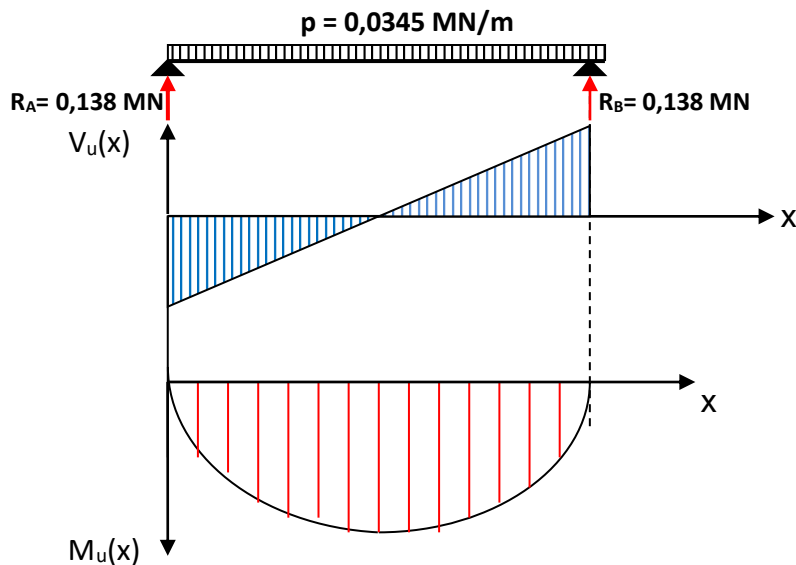
### 4.3. Travail demandé

Il s'agit de :

- Calculer le ferrailage longitudinal et transversal de la poutre (voir annexe 3).
- Vérifier les appuis.
- Tracer l'épure d'arrêt des barres analytiquement et graphiquement.

## 4.4. Solution

### 4.4.1. Evaluation des sollicitations



$$p = 1,35g + 1,5 q = 1,35 \times 20 + 1,5 \times 5 = 34,5 \text{ kN/m} = 0,0345 \text{ MN/m}$$

$$R_A = R_B = pl/2 = (0,0345 \times 8) / 2 = 0,138 \text{ MN}$$

$$V_u(x) = 0,0345x - 0,138 \text{ MN}$$

$$M_u(x) = 0,138x - 0,0345x^2/2$$

$$M_u\left(x = \frac{l}{2}\right) = M_{u,\max} = \frac{0,0345 \times 8^2}{8} = 0,276 \text{ MNm}$$

### 4.2.2. Ferrailage longitudinal

- Moment réduit

$$\mu = \frac{M_u}{b \times d^2 \times f_{bu}} = \frac{0,276}{0,30 \times 0,72^2 \times 14,17} = 0,125 < \mu_l = 0,372$$

- Position de l'axe neutre

$$\alpha = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu}) = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2 \times 0,125}) = 0,167 < \alpha_{u,\lim} = 0,617$$

- Bras de levier

$$z = (1 - 0,4\alpha) \times d = (1 - 0,4 \times 0,167) \times 0,72 = 0,672 \text{ m}$$

- Section d'acier

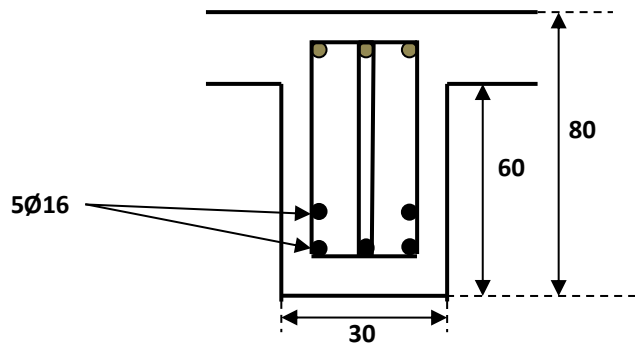
$$A_s = \frac{M_u}{z \times \frac{f_e}{\gamma_s}} = \frac{0,276}{0,672 \times 500/1,15} = 9,45 \text{ cm}^2$$

- Condition de non fragilité

$$\frac{A_s}{b \times d} \geq 0,23 \frac{f_t}{f_e} \rightarrow A_{s,min} = \frac{0,23 \times b \times d \times f_{tj}}{f_e} = \frac{0,23 \times 0,30 \times 0,72 \times 2,1}{500} = 2,09 \text{ cm}^2 \rightarrow A_s > A_{s,min}$$

- Choix du ferrailage

Compte tenu de la largeur de la poutre et de la quantité d'armatures nécessaires ( $A_s = 9,45 \text{ cm}^2$ ), on peut placer 3 barres  $\varnothing 16$  pour le premier lit, et 2 barres  $\varnothing 16$  pour le second lit. Soit 5 $\varnothing 16$  ( $10,05 \text{ cm}^2$ ) sur 2 lits.



#### 4.2.3. Ferrailage transversal

- Choix du diamètre

On peut prendre comme diamètre des aciers transversaux :

$$\varnothing_t = \frac{\varnothing_l}{3} = \frac{16}{3} = 5,33 \text{ cm}$$

Ce qui donne un double cadre  $\varnothing 6$ , soit :

$$A_t = 4 \text{ brins } \varnothing 6 = 4 \varnothing 6 = 1,13 \text{ cm}^2$$

- Vérification de la contrainte de cisaillement du béton

$$\tau_{max} = \frac{V_u}{b \times d} \leq \tau_{u,limite} = \text{Min} (0,2f_{c28}/\gamma_b; 5 \text{ MPa}) \rightarrow \text{Si les armatures transversales sont droites.}$$

$$\tau_{max} = \frac{0,138}{0,30 \times 0,72} = 0,639 \text{ MPa} \leq \text{Min} (3,33; 5 \text{ MPa}) \rightarrow \tau_{max} \leq 3,33 \text{ MPa} \rightarrow \text{Vérifiée}$$

- Armatures d'âme dans la zone d'appui

Pour le calcul de l'espacement maximal dans la zone d'appui, il faut vérifier :

$$s_t \leq \text{Min} (0,9 d; 40 \text{ cm}) \text{ et } \frac{A_t \times f_e}{b \times s_t} \geq 0,4 \text{ MPa}$$

$s_{t,max}$ , doit donc vérifier la relation suivante :

$$s_{t,max} = \text{Min} (0,9 d; 0,40 \text{ m}; \frac{A_t \times f_e}{b \times s_t}) = \text{Min} (0,648; 0,4; 0,47) = 0,40 \text{ m}$$

$$s_{t,max} = 40 \text{ cm}$$

Par ailleurs, le rapport de la section  $A_t$  sur l'espacement  $s_t$  des armatures transversales doit vérifier l'inégalité suivante :

$$\frac{A_t}{b \times s_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} \times k)}{0,9 f_e (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

Soit :

$$s_t \leq \frac{0,9 f_e \times A_t (\sin \alpha + \cos \alpha)}{b \times \gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} \times k)} \approx \frac{0,8 f_e \times A_t}{b (\tau_u - 0,3 f_{tj} \times k)}$$

Si on considère qu'il y a une reprise de bétonnage entre la poutre et la dalle, alors  $k = 0$ .

Et, si on utilise des cadres verticaux, l'inégalité précédente devient :

$$s_t \leq \frac{0,8 f_e \times A_t}{b \times \tau_u}$$

L'espacement maximal dans la zone d'appui est :

$$s_t \leq \frac{0,8 \times 500 \times 1,13}{0,30 \times 0,639} = 0,236 \text{ m}$$

$$s_t \leq 23,6 \text{ cm} \rightarrow s_{t0} \approx 23 \text{ cm}$$

- Calcul des espacements dans la zone centrale à partir de l'équation  $V_u(x)$

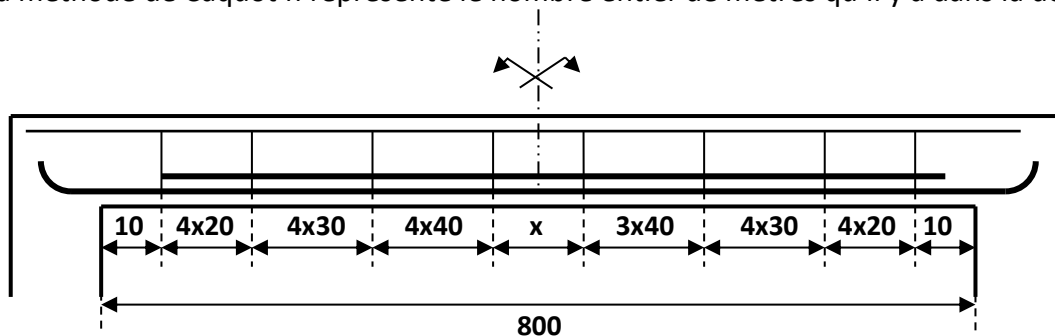
$$s_t \leq \frac{0,9 \times f_e \times A_t}{b \times \gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} \times k)} = \frac{0,9 f_e \times A_t}{1,15 \times \frac{V_u}{d}} = \frac{0,72 \times 0,9 \times 500 \times 1,13 \times 10^{-4}}{1,15 \times V_u} = 0,032 / V_u$$

$$s_t \leq 0,032 / V_u \rightarrow V_u(x) = 0,0345x - 0,138$$

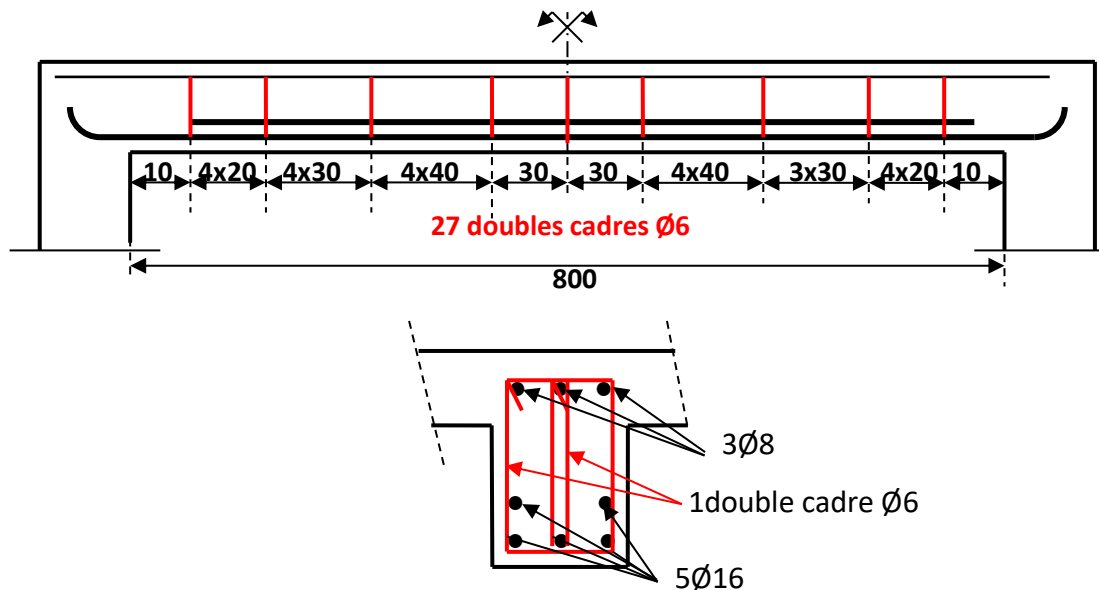
x (m)	$V_u$ (MN)	$s_t \leq 0,032 / V_u$ (m)	$s_t$ retenu (m)	Nombre
0	0,138	0,232	0,23	
*0,23/2 + 4 x 0,23 = 1,035	0,102	0,314	0,31	4
1,035 + 4 x 0,31 = 2,275	0,0595	0,54 > $s_{t,max} = 0,40$	0,40	

\*Le premier cadre est placé à  $s_{t0}/2$  pour couder la fissure. Pour simplifier le calcul et la mise en œuvre, on répète n fois le même espacement, n étant généralement pris égal à 3 ou 4.

Pour la méthode de Caquot n représente le nombre entier de mètres qu'il y a dans la demi-portée.



La répartition des cadres dans la zone centrale, obtenue à partir de l'équation de l'effort tranchant, aboutit à un espace  $x$  qui vaut 60 cm. On peut garder cette distribution, comme on peut la revoir de manière à intégrer  $x$  à la suite des espacements.



- Espacement en utilisant la suite de Caquot

Cette méthode permet d'obtenir rapidement la répartition des espacements le long de la poutre après avoir calculé  $s_{t0}$ . Dans notre cas, la méthode s'applique car la poutre est de section constante et soumise à une charge uniformément répartie. On procède comme ce qui suit :

Après avoir calculer  $s_{t0}$  les autres espacements sont choisis de sorte à suivre la série de Caquot suivante :

7, 8, 9, 11, 13, 16, 20, 25, 30, 40 cm.

Dans le cas de cette application, la répartition est :

25, 30, 40 (car  $s_{tmax} = 40$  cm).

Compte tenu des modifications apportées aux espacements, on trouve pratiquement la même répartition des cadres. Mais, en général, cette méthode simplifiée consomme plus d'armatures transversales.

- Armatures d'âme dans le cas où il n'y a pas de reprise de bétonnage

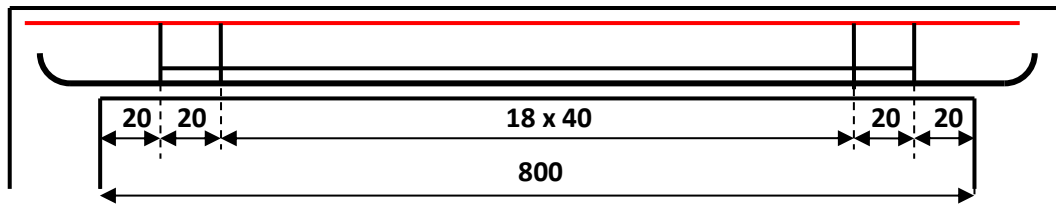
Dans le cas où il n'y a pas de reprise de bétonnage,  $k=1$ , et :

$$s_t \leq \frac{0,9 f_e \times A_t (\sin \alpha + \cos \alpha)}{b \times \gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{tj} \times k)} = \frac{0,9 f_e \times A_t}{b \times \gamma_s \left( \frac{V_u}{b \times d} - 0,3 f_{tj} \times k \right)} = \frac{0,9 \times 500 \times 1,13 \times 10^{-4}}{0,30 \times 1,15 \left( \frac{0,138}{0,30 \times 0,72} - 0,3 \times 2,1 \right)}$$

$$s_t \leq 14,7 \text{ m} \rightarrow 14,7 \text{ m} > s_{t,max} = 0,40 \text{ m}$$

L'espacement calculé est très grand, ceci s'explique par la capacité du béton à résister à la traction.

Quand il n'y a pas de reprise de bétonnage, les cadres doivent être espacés de 40 cm au maximum avec des premiers cadres placés à  $40/2 = 20$  cm du nu d'appui.



#### 4.2.4. Epure d'arrêt des barres

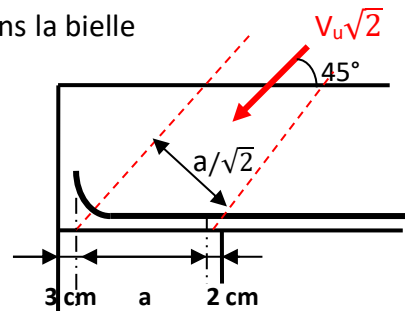
##### 4.2.4.1. Vérification des appuis

La poutre repose sur deux appuis en béton de largeur 40 cm. On doit vérifier que la section d'armatures longitudinales est suffisante et que la compression dans la bielle de béton  $\sigma_{bc}$  est telle que :

$$\sigma_{bc} \leq 0,8 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}$$

- Vérification de la contrainte de compression dans la bielle

La section perpendiculaire à l'effort (incliné à  $45^\circ$ ) de compression dans la bielle d'about est :  $(b \times a) / \sqrt{2}$



Enrobage = 3 cm

$a$  = longueur de la bielle comprimée (généralement égale à la longueur d'ancrage des aciers longitudinaux moins 2 cm) et  $a \leq 0,9d$

$$\sigma_{bc} = \frac{\text{Effort}}{\text{Section}} = \frac{V_{u,\text{appui}} \sqrt{2}}{b \times \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{2V_{u,\text{appui}}}{b \times a} \leq 0,8 \frac{f_{c28}}{\gamma_b} \rightarrow \frac{V_{u,\text{appui}}}{b \times a} \leq 0,4 \frac{f_{c28}}{\gamma_b}$$

En prenant un enrobage de 3 cm au bout du premier lit d'armatures, on obtient :

$$a = 40 - 3 - 2 = 35 \text{ cm}$$

$$\frac{V_{u,\text{appui}}}{b \times a} = \frac{0,138}{0,35 \times 0,30} = 1,31 \text{ MPa} < 0,4 \times \frac{25}{1,5} = 6,67 \text{ MPa} \rightarrow \text{Vérifiée}$$

$$a = 35 \text{ cm} < 0,9 \times 0,72 = 0,648 \text{ m}$$

- Vérification de la section d'acier sur appui (section minimale)

La section  $A_s$  qui arrive jusqu'aux appuis doit être telle que :

$$A_s \geq \frac{V_u}{f_{su}} = \frac{\gamma_s V_u}{f_e} = \frac{1,15 \times 0,138}{500} = 3,17 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 3,17 \text{ cm}^2$$

$$\frac{f_e}{\gamma_s} \leftarrow \overline{A_s} \rightarrow V_u$$



Si nous prolongeons les barres du premier lit, soit 3Ø16, la section correspondante est 6,03 cm<sup>2</sup>, elle est donc largement suffisante.

En pratique, la moitié des aciers nécessaires en travée est prolongée jusqu'aux appuis (généralement, c'est le premier le premier lit).

- Ancrage - adhérence

L'ancrage droit suffit-il pour que n barres (n, c'est le nombre de barres à l'appui, ici égal à 3) puissent ancrer l'effort  $V_{u,appui}$ .

La contrainte de scellement droit vaut à l'ELU :

$$\tau_{su} = 0,6 \times \psi_s^2 \times f_{cj}$$

Pour une barre Ø 16 avec  $f_{c28} = 25$  MPa, on a :

$$\tau_{su} = 2,84 \text{ MPa}$$

Chaque barre Ø 16 reprend un effort égal à :

$$\frac{V_u}{n} = \frac{0,138}{3} = 0,046 \text{ MN}$$

L'ancrage droit nécessaire a pour longueur L, telle que :

$$\frac{V_u}{n} = 0,046 < \pi \times \varnothing \times L \times \tau_{su} = 3,14 \times 0,016 \times 2,84 = 0,1427$$

$$L > \frac{0,046}{0,1427} = 0,32 \text{ m} < 0,35 \text{ m (a = 35 cm)} \rightarrow \text{L'ancrage droit suffit largement.}$$

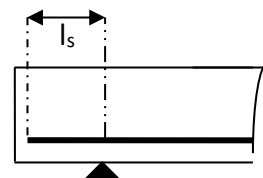
### Remarque

En pratique, à défaut de calcul précis, on peut adopter comme longueur de scellement droit les valeurs suivantes :

- $l_s = 40\varnothing$  pour les aciers Fe E 400 (haute adhérence)
- $l_s = 50\varnothing$  pour les Fe E 500 (HA)

Pour le lit de 3Ø16 conservé jusqu'aux appuis (Fe E 500), on a :

$$l_s = 50\varnothing = 50 \times 1,6 = 80 \text{ cm}$$



#### 4.2.4.2. Epure d'arrêt des barres

Les calculs précédents montrent que sur les 5Ø16 nécessaires en travée (zone centrale), seul le lit inférieur de 3Ø16 est prolongé jusqu'aux appuis pour la reprise de la composante horizontale de la force de compression des bielles à 45°. Le second lit de 2Ø16 sera donc arrêté avant d'arriver aux appuis.

- Tracé du diagramme du moment fléchissant

La courbe du moment fléchissant est donnée par l'équation :

$$M_u(x) = +0,138x - 0,0345 \frac{x^2}{2}$$

Cette courbe sera décalée de  $0,8h = 0,8 \times 80 = 64$  cm (voir Fig.1.22). .

- Calcul des moments résistants ultimes réduits  $M_{ru}$

$$M_{ru} = A_{sr} \times \frac{f_e}{\gamma_s} \times z$$

$A_{sr}$  = section réduite d'armatures

$$\frac{f_e}{\gamma_s} = \frac{500}{1,15} = 434,78 \approx 435 \text{ MPa}$$

- Pour le premier lit (jusqu'à l'appui) =  $3\emptyset 16 = 6,03 \text{ cm}^2$

$$\alpha = \frac{A_s \times f_e / \gamma_s}{0,8 b d \times f_{bu}} = \frac{6,03 \times 10^{-4} \times 435}{0,8 \times 0,3 \times 0,72 \times 14,17} = 0,107 < \alpha_{u,lim} = 0,617$$

D'où :

$$z = (1 - 0,4\alpha) d = (1 - 0,4 \times 0,107) \times 0,72 = 0,689 \text{ m}$$

$$M_{ru1} = A_{sr} \times \frac{f_e}{\gamma_s} \times z = 6,03 \times 10^{-4} \times 435 \times 0,689 = 0,181 \text{ MNm (premier lit)}$$

$$M_{ru1} = 0,181 \text{ MNm (premier lit)}$$

- Pour les deux lits =  $5\emptyset 16 = 10,048 \text{ cm}^2$

$$\alpha = \frac{A_s \times f_e / \gamma_s}{0,8 b d \times f_{bu}} = \frac{10,048 \times 10^{-4} \times 435}{0,8 \times 0,3 \times 0,72 \times 14,17} = 0,1785 < \alpha_{u,lim} = 0,617$$

$$z = (1 - 0,4\alpha) d = (1 - 0,4 \times 0,1785) \times 0,72 \approx 0,669 \text{ m}$$

$$M_{ru1+2} = A_{sr} \times \frac{f_e}{\gamma_s} \times z = 10,048 \times 10^{-4} \times 435 \times 0,669 = 0,292 \text{ MNm (2 lits)}$$

$$M_{ru1+2} = 0,292 \text{ MNm (2 lits)}$$

#### 4.2.4.3. Tracer de la courbe des moments résistants

Après avoir décalé de  $z = 0,8h = 64$  cm (vers la gauche) la courbe des moments flechissants, on trace les paliers horizontaux limitant les moments résistants (ici, il s'agit de  $M_{ru1}$ ,  $M_{ru1+2}$ ).

Le passage d'un moment résistant à un autre plus élevé se fait progressivement sur la longueur d'ancrage du lit ajouté, soit 64 cm.

Le diagramme des moments résistants reste au-dessus et ne coupe pas le diagramme des moments fléchissants.

Aussi, on obtient le diagramme enveloppe des moments résistants, en partant, par exemple, du point O (point d'intersection du moment résistant  $M_{r1}$  avec la courbe décalée) et en le joignant au point B décalé de 64 cm vers la droite.

Ainsi, on arrive à tracer la courbe enveloppe des moments résistants qui doit *envelopper* la courbe décalée des moments sollicitants.

#### 4.2.4.4. Longueurs des barres arrêtées

La longueur des barres du lit arrêté peut être déterminée de deux manières : numériquement ou graphiquement.

##### - Numériquement

La procédure à suivre est la suivante :

On développe l'équation de la courbe des moments décalée de 0.8h, valable à droite de l'appui de rive gauche :

$$M_u(x + 0,64) = 0,138(x + 0,64) - 0,0345 \frac{(x + 0,64)^2}{2} \approx -0,017x^2 + 0,116x + 0,08$$

$$M_u(x + 0,64) = -0,017x^2 + 0,116x + 0,08$$

Le point d'intersection entre les deux courbes de moments décalés et résistants s'obtient en égalisant les relations suivantes :

$$M_{ru1} = M_u(x + 0,64) \rightarrow 0,181 = -0,017x^2 + 0,116x + 0,08$$

$$-0,017x^2 + 0,116x - 0,101 = 0$$

On trouve :

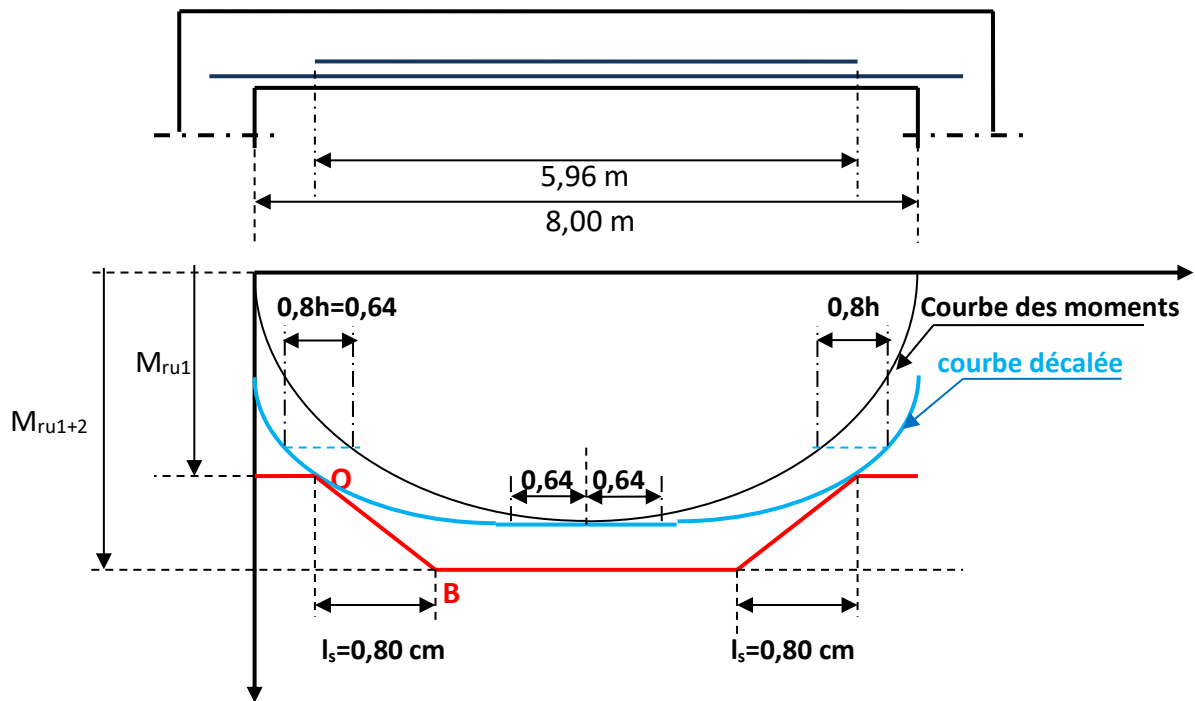
$$x = 1,02 \text{ m}$$

Ce point correspond à l'abscisse à partir de laquelle doit débuter le deuxième lit de Ø16.

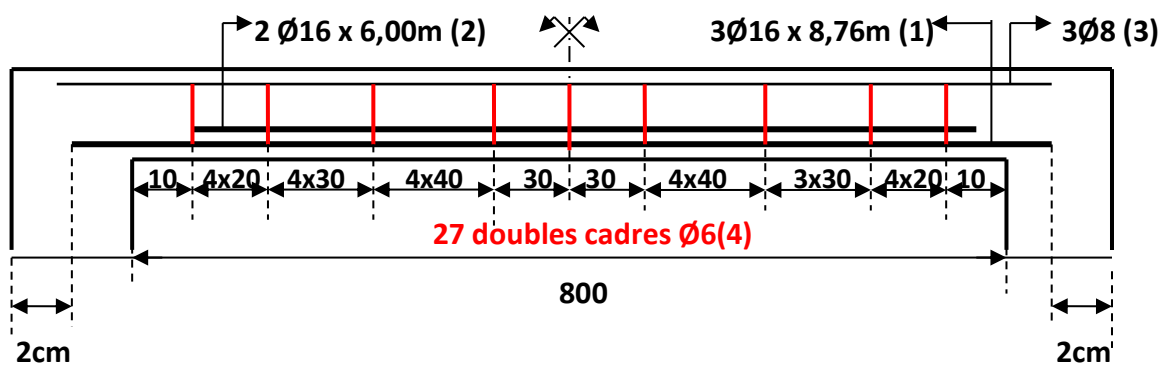
##### - Graphiquement

$$M_u(x) = +0,138x - 0,0345 \frac{x^2}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow M_u(0) = 0 \\ x = 1 \text{ m} & \rightarrow M_u(1) = 0,121 \text{ MNm} \\ x = 2 \text{ m} & \rightarrow M_u(2) = 0,207 \text{ MNm} \\ x = 3 \text{ m} & \rightarrow M_u(3) = 0,259 \text{ MNm} \\ x = 4 \text{ m} & \rightarrow M_u(4) = 0,276 \text{ MNm} \end{cases}$$

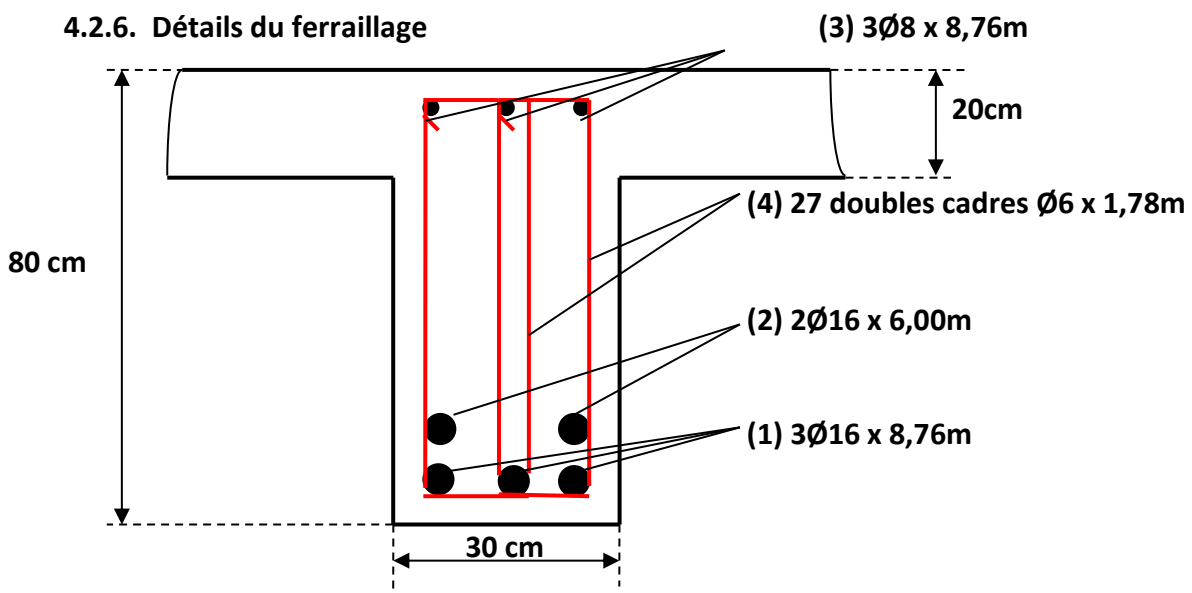
La détermination graphique des points d'arrêt des armatures longitudinales est représentée ci-dessous.

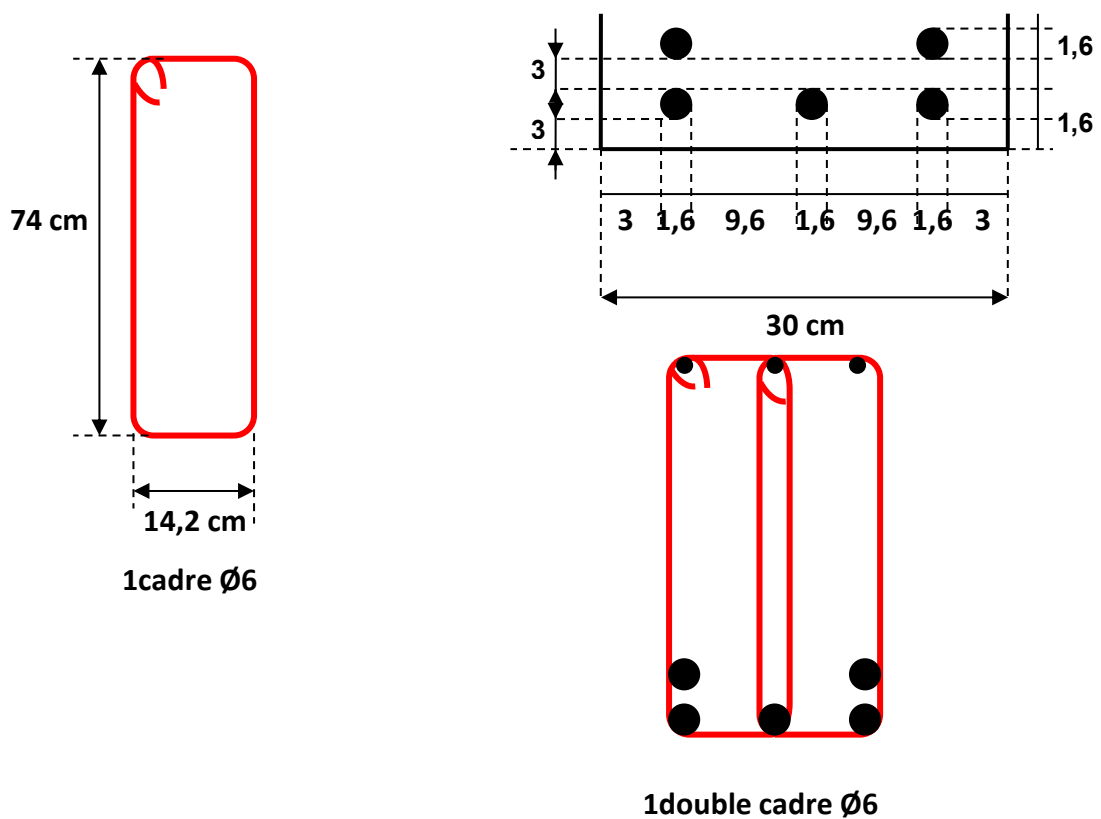


#### 4.2.5. Schéma du ferrailage de la poutre



#### 4.2.6. Détails du ferrailage





### Remarques

Sur les dessins, il faut :

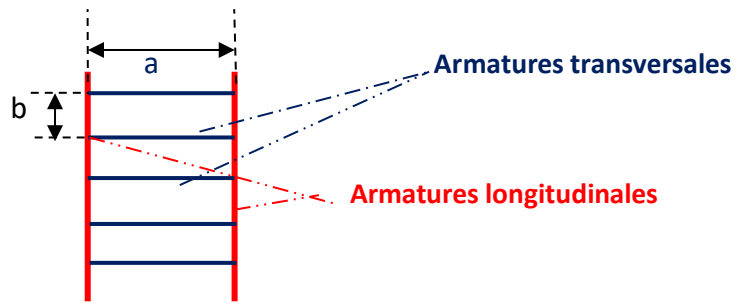
- Fixer tous les détails permettant d'exécuter la construction de l'ouvrage conformément aux résultats auxquels ont abouti les calculs.
- Coter distinctement les distances entre les armatures elles-mêmes et entre armatures et coffrage.
- indiquer sur les plans d'exécution la dimension maximale D du granulat à utiliser en appliquant les règles usuelles suivantes :

$$r \geq \frac{D}{1,4} \rightarrow \text{Granulats roulés}$$

$$r \geq \frac{D}{1,2} \rightarrow \text{Granulats concassés}$$

r représente le rayon moyen de la plus petite maille (grille de ferrailage) à bétonner :

$$r = \frac{a \times b}{2(a + b)}$$



- indiquer la dimension maximale des granulats D. Celle-ci est fixée comme ce qui suit :  
Distance minimale entre les cadres :  $a = 10 \text{ cm} - 0,6 \text{ cm} = 9,4 \text{ cm}$

Espacement minimal (horizontal) entre armatures longitudinales :  $b = 3 \text{ cm}$  (espace entre 2 lits).

$$r = \frac{a \times b}{2(a + b)} = \frac{9,4 \times 3}{2(9,4 + 3)} = 1,14 \text{ cm}$$

Ce qui donne :

$D = 1,14 \times 1,4 = 1,6 \text{ cm} \rightarrow$  Pour les granulats roulés

$D = 1,14 \times 1,2 = 1,37 \text{ cm} \rightarrow$  Pour les granulats concassés

Sur le dessin de ferrailage, on peut indiquer la dimension maximale D en utilisant les dimensions normalisées suivantes :

8/15 pour les granulats roulés

4/8 pour les granulats concassés