

Chapitre III : Analyse de la réponse des structures à une action sismique

Applications



« La différence entre avoir une structure assurée et une structure non assurée est définie par le degré de risque considéré acceptable, et non par la fausse illusion d'avoir éliminé complètement ce degré de risque ».

A. M. Freudental

Applications

1 : Méthode statique équivalente (§ 1.1).

2 : Évaluation des fréquences de vibration d'un bâtiment à trois niveaux contreventé par des refends (§ 2.1.2.3)

2 : Évaluation des efforts dans un portique à trois niveaux par la méthode du spectre de réponse (§ 2.2).

3 : Évaluation du cisaillement à la base d'un refend par la méthode modale (§ 2.3).

4. Évaluation des forces maximales à chaque niveau d'un portique par la méthode du spectre de réponse (§ 2.4).

5. Calcul de la période fondamentale par les méthodes approchées d'un bâtiment (R + 3) contreventé par des refends (§ 2.5).

6. Recherche des fréquences propres d'un bâtiment (R+6 + 2 sous-sols) contreventé par des refends (§ 2.6).

1. MÉTHODE STATIQUE EQUIVALENTE

1.1. Énoncé

Il s'agit de répartir la force sismique aux différents niveaux d'un bâtiment de 5 niveaux (R + 4) contreventé transversalement et longitudinalement par des portiques. Tous les niveaux sont identiques avec une hauteur d'étage constante ($h = 3,06$ m). Le bâtiment appartient au groupe d'usage 2, situé en zone IIa sur un site meuble S_3 . Pour Q, on suppose que seuls les critères relatifs aux conditions minimales des files porteuses, au contrôle de la qualité des matériaux et au contrôle de la qualité de la construction ne sont pas vérifiés.

1.2. Données

1.2.1. Charges et surcharges

Les charges à considérer par niveau sont :

- Charges permanentes

$g = 0,65$ t /m² pour le niveau terrasse

$g = 0,5$ t /m² pour un niveau courant

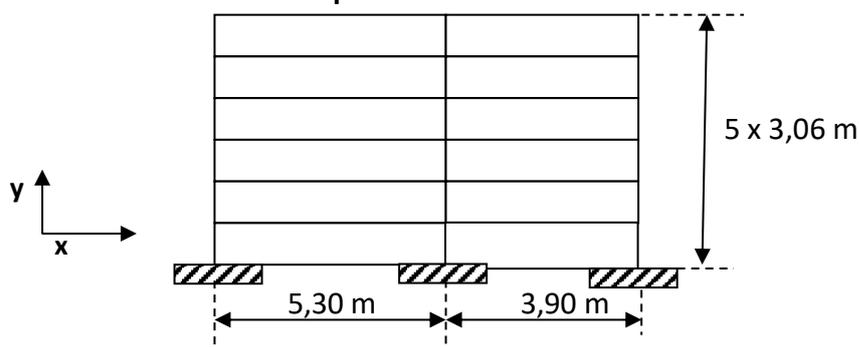
- Surcharges d'exploitation

$p = 0,1$ t/m² pour la terrasse

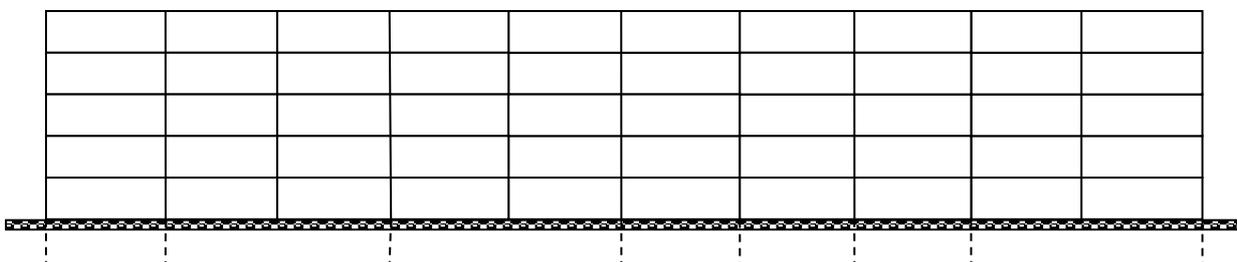
$p = 0,5$ t/m² pour un niveau courant

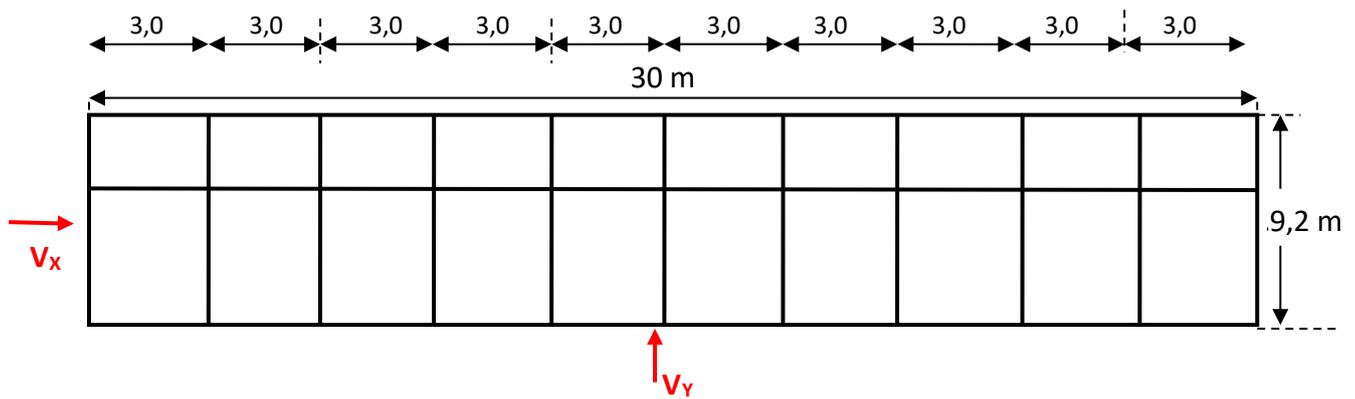
1.2.2. Système structural

1.2.2.1. Portique transversal



1.2.2.2. Portique longitudinal





1.3. Travail demandé

Il s'agit de répartir la résultante sismique à la base (V_x et V_y) aux différents niveaux du bâtiment conformément au règlement parasismique algérien (RPA99/2003).

1.4. Solution

1.4.1. Évaluation de l'effort tranchant V_x

La résultante V_x est évaluée comme ci-dessous :

$$V_x = \frac{A D Q}{R} W$$

Où,

- $A = 0,15$ (groupe 2, zone IIa)
- $R = 3,5$ (portiques auto stables avec remplissage rigide)
- $Q = 1 + \sum_1^6 P_q = 1 + 0,05 + 0,05 + 0,10 = 1,2$ (seuls les critères 1, 5 et 6 non observés)
- $D_x = f(T) = ?$

La période de vibration fondamentale peut être estimée par la formule : $T_x = \frac{0,09 h}{\sqrt{L_x}}$

$$T_x = \frac{0,09 h}{\sqrt{L_x}} = 0,09 \times \frac{3,06 \times 5}{\sqrt{30}} = 0,25 \text{ sec}$$

$$\text{Site meuble } S_3 : T_2 = 0,5 \text{ sec} \rightarrow 0 \leq T_x \leq T_2 \rightarrow D_x = 2,5 \eta \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{7}{2 + \xi}}$$

Pour un amortissement $\xi = 6 \%$, le coefficient d'amplification dynamique vaut :

$$\eta = \sqrt{\frac{7}{2 + 6}} = 0,935 \rightarrow D_x = 2,5 \times 0,935 = 2,3375 \approx 2,34$$

$$D_x \approx 2,34$$

- $W ?$

$$W = \sum w_i$$

$$w_i = w_{gi} + \beta w_{qi}$$

Bâtiment d'habitation : $\beta = 0,2$

Niveau	w_{gi}	w_{qi}	w_i	$w_i h_i$	h_i	$w_i h_i / \sum w_i h_i$
5	174,1	26,8	179,4	2744,82	15,3	0,358
4	133,9	133,9	160,7	1966,97	12,24	0,256
3	133,9	133,9	160,7	1475,23	9,18	0,192
2	133,9	133,9	160,7	983,48	6,12	0,128
1	133,9	133,9	160,7	491,74	3,06	0,064
			$W = \sum w_i = 822,2$	$\sum w_i h_i = 7662,24$		

L'effort tranchant V_x à la base vaut :

$$V_x = \frac{A D Q}{R} W = \frac{0,15 \times 2,34 \times 1,2}{3,5} \times 822,2 = 98,946 \text{ t}$$

$V_x \approx 99 \text{ t}$

1.4.2. Répartition de V_x suivant la hauteur

La force à répartir aux différents niveaux est :

$$V - F_t$$

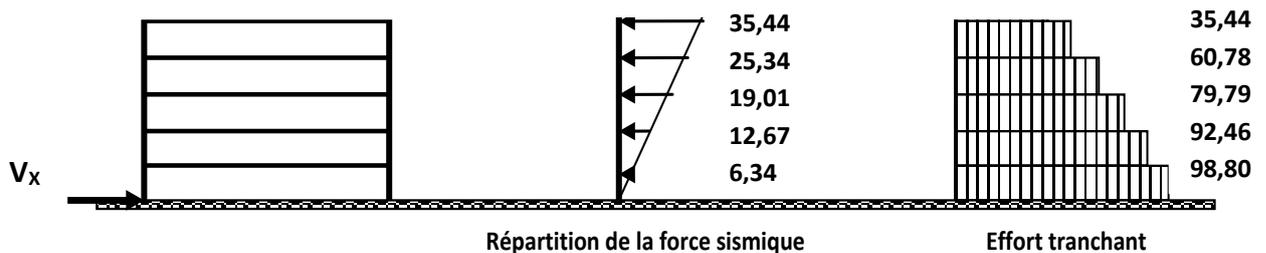
Où,

$$F_t = 0,07 T V \rightarrow F_t \leq 0,25 V$$

$$T = 0,25 \text{ sec} < 0,7 \text{ sec} \rightarrow F_t = 0$$

La force au niveau k est :

$$F_k = (V - F_t) \frac{m_k h_k}{\sum m_j h_j} = V \frac{m_k h_k}{\sum m_j h_j} = 99 \times \frac{m_k h_k}{\sum m_j h_j}$$



1.4.3. Évaluation de l'effort tranchant V_y

$$V_y = \frac{A D Q}{R} W$$

Avec :

- $A = 0,15$
- $R = 3,5$
- $Q = 1 + \sum_1^6 P_q = 1 + 0,05 + 0,10 = 1,15$ (seuls les critères 5 et 6 non observés)

- D_Y ?

$$T_Y = \frac{0,09 h}{\sqrt{L_Y}} = 0,09 \times \frac{3,06 \times 5}{\sqrt{9,2}} = 0,45 \text{ sec}$$

$$T_Y = 0,45 \text{ sec} \rightarrow T_2 = 0,5 \text{ sec} \rightarrow T_Y < T_2 \rightarrow D = 2,5 \eta$$

$$\xi = 6 \% \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{7}{2+6}}$$

$$D_Y = 2,5 \times 0,935 = 2,3375.$$

$$D_Y \approx 2,34$$

- $W = 822,2 \text{ t}$

$$V_Y = \frac{0,15 \times 2,34 \times 1,15}{3,5} \times 822,2 = 94,82 \text{ t}$$

$$V_Y \approx 95 \text{ t}$$

1.4.4. Répartition de l'effort tranchant V_Y

$$T_Y < 0,7 \text{ sec} \rightarrow F_t = 0$$

La distribution de V_Y suivant la hauteur se fait exactement comme pour V_X .

2. ANALYSE MODALE OU METHODE DES MODES NORMAUX

2.1. Rappel

2.1.1. Cas général

La méthode des modes normaux est un procédé de calcul incontournable pour déterminer la réponse dynamique d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté (oscillateurs multiples linéaires) avec masses concentrées soumis à un chargement dynamique quelconque ou à une accélération à la base (cas du séisme).

Pour l'étude d'un séisme horizontal, dans certains cas, la structure est assimilée à une console verticale en ne prenant en considération que les déplacements horizontaux (type brochette).

L'application de l'équation de base du mouvement ($m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t)$) à chaque niveau d'une structure donnée conduit au système d'équations différentielles suivant (si résolution par la méthode des modes normaux) :

$$[M] \ddot{x} + [C] \dot{x} + [K] x = F(t) \quad (3a.1)$$

Où,

[M] : matrice de masse globale

[C] : matrice d'amortissement globale (difficile à évaluer)

[K] : matrice de rigidité correspondant aux nombres de degré de liberté

x, \dot{x}, \ddot{x} : vecteur des déplacements, vitesses et accélérations des masses par rapport à la base

$F(t)$: vecteur de chargement dynamique

L'équation (3a.1) suppose que les propriétés du système (M, C, K) ne changent pas pendant la réponse (vibration) du système, c'est-à-dire, le système est linéaire (limite élastique du système jamais atteinte, pas de plastification).

La stratégie de base de l'analyse modale consiste à découpler le système d'équations couplées (3a.1) et le transformer en un système d'oscillateurs simples en utilisant les coordonnées modales. Pour découpler les équations du mouvement, on introduit une transformation linéaire des variables en utilisant la matrice modale [A]. Cette matrice transforme les équations différentielles des coordonnées $x(t)$ en un nouveau système de coordonnées modales $u(t)$.

Les déplacements relatifs x_i peuvent alors s'exprimer en coordonnées modales (u_n) par le changement de variables suivant :

$$x(t) = [A]u(t) = \sum_{n=1}^N A_n u_n \quad (3a.2)$$

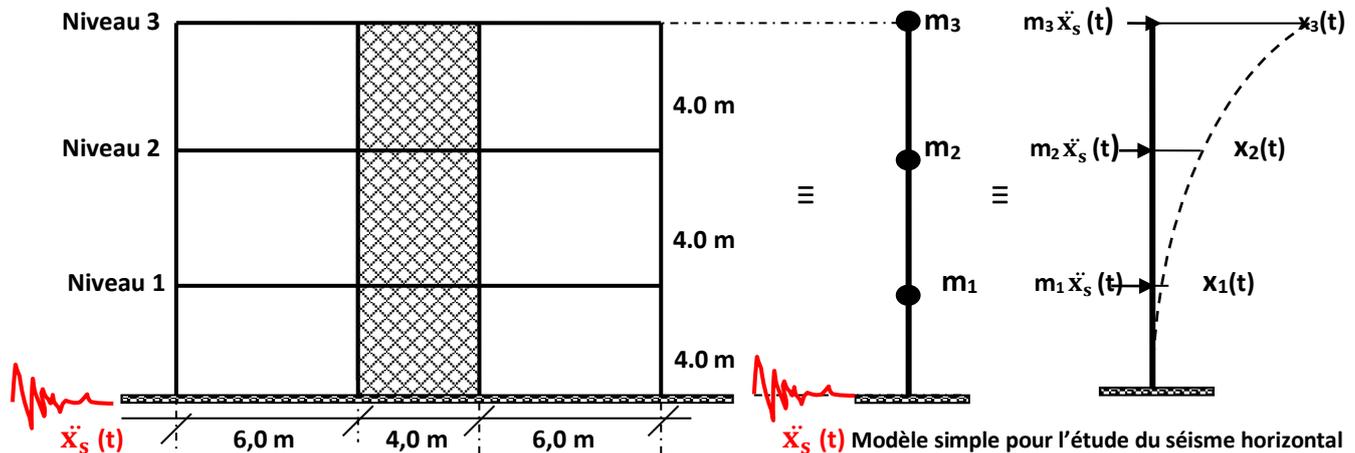
En remplaçant l'équation (3a.2) dans l'équation (3a.1), on obtient :

$$[M] [A] \ddot{u} + [C][A] \dot{u} + [K] [A] u = F(t) \quad (3a.3)$$

2.1.2. Cas d'un bâtiment à trois niveaux soumis à une accélération à la base

2.1.2.1. Equations de base

Pour la simplification de la formulation et pour faciliter l'assimilation de l'analyse des oscillateurs multiples, on utilise une structure composée de trois niveaux de même hauteur et soumise à une accélération à la base.



L'équation du mouvement dans le cas d'une sollicitation sismique $[m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_s(t)]$, appliquée à chaque niveau du bâtiment représenté ci-dessus, conduit au système d'équations suivants :

$$m_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + k_{13} x_3 = -m_1 \ddot{x}_s(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c \dot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + k_{23} x_3 = -m_2 \ddot{x}_s(t)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 + c \dot{x}_3 + k_{31} x_1 + k_{32} x_2 + k_{33} x_3 = -m_3 \ddot{x}_s(t)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[M] \ddot{x} + [C] \dot{x} + [K] x = - [M] e_x \ddot{x}_s(t) \quad (3a.4)$$

Où,

e_x : vecteur direction

$\ddot{x}_s(t)$: accélération du sol

L'équation (3a.4) peut s'écrire encore (en supprimant l'amortissement pour simplifier les calculs) comme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_s(t)$$

La matrice des masses doit être multipliée par le vecteur direction e_x :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{x}_s(t) = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \ddot{x}_s(t)$$

Dans l'équation (3a.4), M représente la matrice des masses, K la matrice de rigidité et x le vecteur des déplacements relatifs, soit :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.1.2.2. Analyse modale

Le système d'équations couplées (3a.4) peut être découplé et transformé en un système d'oscillateurs simples en utilisant les coordonnées modales. Les déplacements relatifs (x_i) peuvent alors s'exprimer en coordonnées modales (u_n) par le changement de variables de l'équation (3a.2):

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = [A] u = \sum_{n=1}^3 A_n u_n$$

Où,

A_n : vecteurs propres

u : coordonnées modales

[A] : matrice des vecteurs modaux

En multipliant à gauche l'équation (3a.4) par la transposée A^T et en tenant compte du changement de variable (3a.2), on obtient :

$$A^T [M] [A] \ddot{u} + A^T [C] [A] \dot{u} + A^T [K] [A] u = - A^T M e_x \ddot{x}_g(t) = - r \ddot{x}_s(t) \quad (3a.5)$$

Ici, r représente le vecteur des facteurs de participation, soit :

$$r = A^T M e_x = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}m_1 + A_{21}m_2 + A_{31}m_3 \\ A_{12}m_1 + A_{22}m_2 + A_{32}m_3 \\ A_{13}m_1 + A_{23}m_2 + A_{33}m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum A_{j1}m_j \\ \sum A_{j2}m_j \\ \sum A_{j3}m_j \end{bmatrix}$$

À partir des conditions d'orthogonalité des modes de déformation, les matrices issues de l'équation (3a.5) sont diagonales (grandeurs généralisées). Par conséquent, la matrice des masses généralisées M^* et la matrice de rigidité généralisée K^* sont données par :

$$M^* = A^T M A = \begin{bmatrix} m_1^* & 0 & 0 \\ 0 & m_2^* & 0 \\ 0 & 0 & m_3^* \end{bmatrix} \quad K^* = A^T K A = \begin{bmatrix} k_1^* & 0 & 0 \\ 0 & k_2^* & 0 \\ 0 & 0 & k_3^* \end{bmatrix}$$

Le système d'équations (3a.5) peut s'écrire alors :

$$M^* \ddot{u} + C^* \dot{u} + K^* u = - A^T M e_x \ddot{x}_s(t) = - r \ddot{x}_s(t) \quad (3a.6)$$

Les grandeurs généralisées et les facteurs de participation dépendent de la normalisation des vecteurs propres A_n . La $n^{\text{ième}}$ ligne de l'équation du mouvement en coordonnées nodales s'écrit :

$$m_n^* \ddot{u}_n + c_n^* \dot{u}_n + k_n^* u_n = - r_n \ddot{x}_s(t) \quad (3a.7)$$

Et, après avoir divisé l'expression (3a.7) par la masse généralisée m_n^* , on obtient :

$$\frac{m_n^*}{m_n^*} \ddot{u}_n + \frac{c_n^*}{m_n^*} \dot{u}_n + \frac{k_n^*}{m_n^*} u_n = \ddot{u}_n + 2 \xi \omega_n \dot{u}_n + \omega_n^2 u_n = - \frac{r_n}{m_n^*} \ddot{x}_s(t) \quad (3a.8)$$

L'équation (3a.8) représente l'équation très connue d'un oscillateur simple (sauf dans le cas où il y a modification de l'amplitude de l'accélération par le facteur de participation $\frac{r_n}{m_n^*}$).

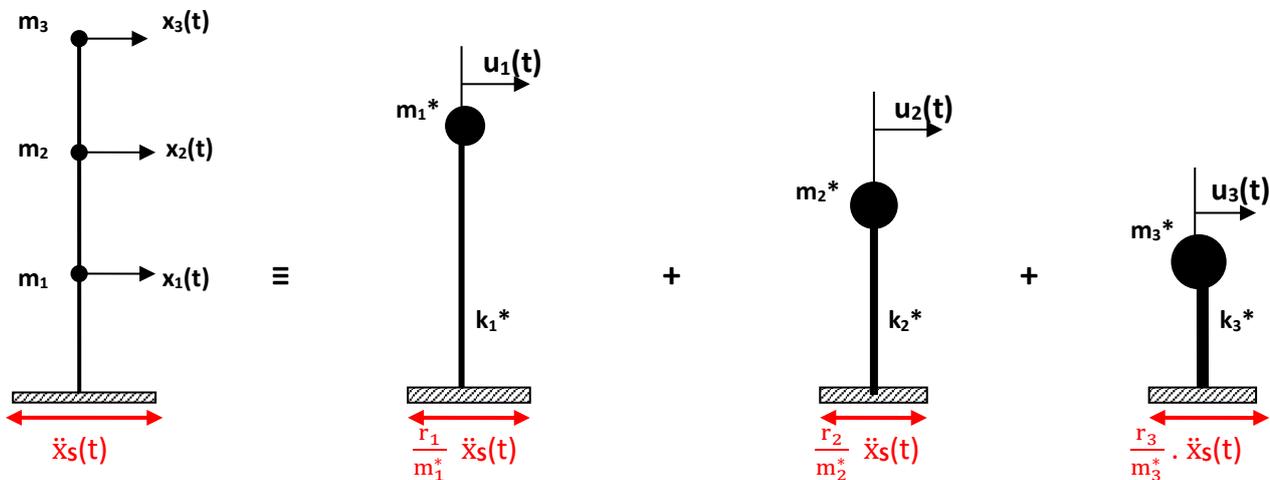
Par conséquent, dans l'analyse modale, l'oscillateur multiple est décomposé en une somme d'oscillateurs simples indépendants (orthogonalité des modes). Leurs réponses, autrement dit leurs déplacements en fonction du temps découlant de l'équation (3a.8), représentent la contribution de chaque mode dans la réponse globale de la structure.

En pratique, la réponse modale est obtenue en résolvant numériquement l'équation (3a.8) par une des méthodes suivantes :

- Méthode de Newmark.
- Différence centrée.
- Série de Fourier.
- Interpolation de l'excitation.

Les déplacements relatifs sont ensuite déterminés par la superposition des réponses modales conformément à l'équation (3a.2).

La figure suivante symbolise le mécanisme de superposition des réponses modales.



L'amplitude de l'accélération du sol est modifiée par les facteurs de participation modaux $\frac{r_n}{m_n^*}$.

Pour évaluer de manière quantitative la contribution de chaque mode dans la réponse globale de la structure à une accélération à sa base, on utilise la masse modale définie comme suit :

$$m_{\text{mod}, n} = \left(\frac{r_n}{m_n^*}\right)^2 m_n^* = \frac{\left[\sum_{j=1}^n A_{jn} m_j\right]^2}{\sum_{j=1}^n A_{jn}^2 m_j} \quad (3a.9)$$

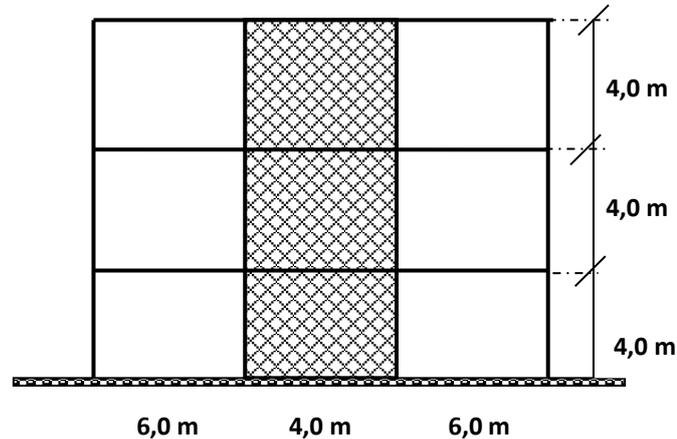
$$\sum_{n=1}^N m_{\text{mod}, n} = \sum_{n=1}^N m_n \quad (3a.10)$$

La masse modale correspond, dans chaque mode, à l'effort tranchant à la base de l'oscillateur multiple. Elle ne dépend pas de la normalisation des modes. Par ailleurs, comme la masse modale

est égale à la somme des masses (3a.10), il est possible de fixer le nombre de modes capables de préciser la réponse de la structure dans l'analyse modale. En général, ce nombre est fixé de façon à ce que la somme des masses modales atteint au moins 90 % de la masse totale.

2.1.2.3. Application : Évaluation des fréquences de vibration d'un bâtiment

Il s'agit d'un bâtiment comportant 3 niveaux (R + 2) contreventé dans chaque direction par deux refends en béton armé de 30 cm d'épaisseur et de 1,6 m⁴ d'inertie avec un amortissement de 4 %.



1. Données

Caractéristiques des refends :

- 30 cm d'épaisseur
- 400 cm de largeur
- 1,6 m⁴ d'inertie avec un amortissement de 4 %.

Charges permanentes

- Niveau 1 : G = 150 tonnes
- Niveau 2 : G = 145 tonnes
- Niveau 3 : G = 136 tonnes

-

Surcharges d'exploitation

- Niveau 1 : Q = 70 tonnes
- Niveau 2 : Q = 65 tonnes
- Niveau 3 : Q = 60 tonnes

2. Données complémentaires conformes au règlement parasismique algérien RPA99/2003

Les caractéristiques sismiques du bâtiment sont :

- Groupe d'usage 2 (bâtiment à usage d'habitation)
- Catégorie S2 (bâtiment implanté sur un site ferme)
- Zone III (zone de forte sismicité)
- Coefficient de comportement : R = 3,5
- Module d'Young : E = 32 000 MPa
- Coefficient d'accélération de zone : A = 0,25

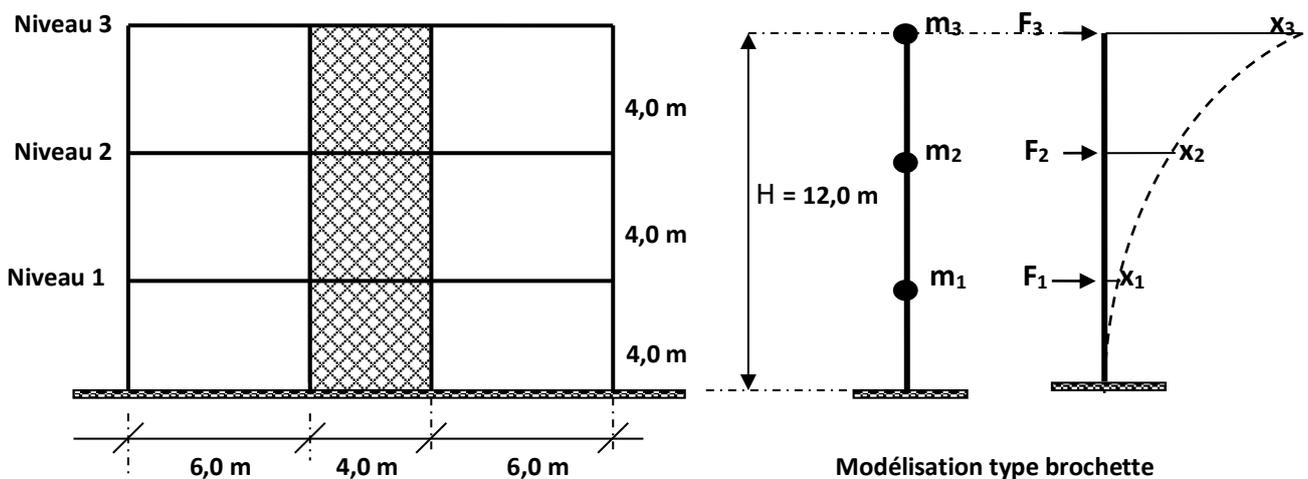
- Coefficient d'amortissement : $\xi = 4 \%$
- Facteur de correction d'amortissement (pour $\xi \neq 5 \%$) : $\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} \geq 0,7$
- Coefficient de pondération des charges d'exploitation : $\beta = 0,2$
- Facteur de qualité : $Q = 1,1$
- Périodes caractéristiques associées à la catégorie du site : $T_1 = 0,15 \text{ sec}$ et $T_2 = 0,40 \text{ sec}$
- $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

3. Spectre de réponse de calcul

L'action sismique est représentée par le spectre de calcul suivant :

$$S_a(T)/g \begin{cases} 1,25 A \left[1 + \frac{T}{T_1} \left(2,5 \eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right] & \rightarrow 0 \leq T \leq T_1 \\ 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{Q}{R} \right) & \rightarrow T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & \rightarrow T_2 \leq T \leq 3,0 \text{ sec} \\ 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \left(\frac{Q}{R} \right) & \rightarrow T > 3,0 \text{ sec} \end{cases}$$

4. Poids des différents niveaux : $G + \beta Q$



$$m_1 = 150 + 0,2 \times 70 = 164 \text{ tonnes} = 1,61 \text{ MN}$$

$$m_2 = 145 + 0,2 \times 65 = 158 \text{ tonnes} = 1,55 \text{ MN}$$

$$m_3 = 136 + 0,2 \times 60 = 148 \text{ tonnes} = 1,45 \text{ MN}$$

5. Périodes de vibration

Considérons la console représentée plus haut. On admet que les planchers sont infiniment rigides dans leur plan pour modéliser la structure par modèle brochette (masses concentrées au niveau des planchers). La console a une inertie constante sur toute sa hauteur. En plus, on considère que l'amortissement des vibrations est nul et qu'il n'y a pas de frottement internes aux matériaux, ni d'absorption d'énergie par plastification. Ce qui donne :

$$F_1 = k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3$$

$$F_2 = k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3$$

$$F_3 = k_{31}x_1 + k_{32}x_2 + k_{33}x_3$$

Un tel système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante ($F = Kx$) :

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \rightarrow K : \text{matrice de rigidité}$$

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \rightarrow F : \text{vecteur- colonne des forces } F_i$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow x : \text{vecteur- colonne des déplacements } x_i$$

Le refend de contreventement est assimilé à une console de hauteur $H = 12,0$ m, encastree à sa base et soumise à trois forces concentrées F_1 , F_2 , et F_3 . Sous l'actions de ces forces, la console se déforme. Les déformations à chaque niveau valent :

$$x_1 = (2F_1 + 5F_2 + 8F_3) \frac{H^3}{162 EI}$$

$$x_2 = (5F_1 + 16F_2 + 28F_3) \frac{H^3}{162 EI}$$

$$x_3 = (8F_1 + 28F_2 + 54F_3) \frac{H^3}{162 EI}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$X = K^{-1} F \rightarrow K^{-1} : \text{matrice de souplesse (inverse de la matrice de rigidité)}$$

Ce qui donne :

$$K^{-1} = \frac{H^3}{162 EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix}$$

L'inverse vaut :

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = \frac{162 EI}{13 H^3} \begin{bmatrix} 40 & -23 & 6 \\ -23 & 22 & -8 \\ 6 & -8 & 3.5 \end{bmatrix}$$

En appliquant la deuxième loi de Newton ($F = m\ddot{y}$) à ce système (structure soumise à un séisme), on obtient la forme matricielle par :

$$F = M \ddot{X}$$

Où,

$$\ddot{X} : \text{vecteur colonne accélération de composante : } \frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \frac{d^2x_3}{dt^2}$$

La somme des forces étant nulle, on a l'équation du mouvement suivante :

$$K X + M \ddot{X} = 0 \quad (3a.11)$$

Cette équation différentielle (équation d'équilibre dynamique) a comme solution :

$$X = A \cos \omega t$$

Où,

$$\omega : \text{pulsation de la vibration} = \frac{2\pi}{T}$$

A : vecteur colonne des amplitudes (valeurs maximales atteintes par les déformations)

L'équation d'équilibre dynamique (3a.11) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$K A - M \omega^2 A = 0 \text{ ou } (M^{-1} K - \omega^2 I) A = 0 \quad (3a.12)$$

Les inconnues ω sont donc les racines carrées des valeurs propres ω^2 de la matrice $M^{-1} K$.

Pour un bâtiment à trois niveaux, on a donc trois pulsations et par conséquent trois périodes de vibration T_i .

$$M^{-1} K = \begin{bmatrix} 1/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}/m_1 & k_{12}/m_1 & k_{13}/m_1 \\ k_{21}/m_2 & k_{22}/m_2 & k_{23}/m_2 \\ k_{31}/m_3 & k_{32}/m_3 & k_{33}/m_3 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} K = \frac{162 EI}{13 H^3} \begin{bmatrix} 40/m_1 & -23/m_1 & 6/m_1 \\ -23/m_2 & 22/m_2 & -8/m_2 \\ 6/m_3 & -8/m_3 & 3.5/m_3 \end{bmatrix}$$

Sachant que :

$$H^3/EI = 12^3 / (32\,000 \times 1,6) = 0,03375$$

On a donc une matrice de souplesse équivalente à :

$$K^{-1} = \frac{H^3}{162 EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix} = \frac{1}{4800} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 16 & 28 \\ 8 & 28 & 54 \end{bmatrix} \rightarrow K = \frac{4800}{13} \begin{bmatrix} 40 & -23 & 6 \\ -23 & 22 & -8 \\ 6 & -8 & 3,5 \end{bmatrix}$$

La matrice des masses vaut :

$$M = \begin{bmatrix} 0,164 & 0 & 0 \\ 0 & 0,158 & 0 \\ 0 & 0 & 0,148 \end{bmatrix} \rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 6,097 & 0 & 0 \\ 0 & 6,329 & 0 \\ 0 & 0 & 6,757 \end{bmatrix}$$

Le produit matriciel $M^{-1} K$ vaut :

$$M^{-1} K = \frac{4800}{13} \begin{bmatrix} 243,88 & -140,231 & 36,582 \\ -145,567 & 139,238 & -50,632 \\ 40,542 & -54,056 & 23,649 \end{bmatrix}$$

Les pulsations propres sont données par le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 243,88 - \omega^2 & -140,231 & 36,582 \\ -145,567 & 139,238 - \omega^2 & -50,632 \\ 40,542 & -54,056 & 23,649 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (243,88 - \omega^2) \begin{vmatrix} 139,238 - \omega^2 & -50,632 \\ -54,056 & 23,649 - \omega^2 \end{vmatrix} \\ + 140,231 \begin{vmatrix} -145,567 & -50,632 \\ 40,542 & 23,649 - \omega^2 \end{vmatrix} \\ + 36,582 \begin{vmatrix} -145,567 & 139,238 - \omega^2 \\ 40,542 & -54,056 \end{vmatrix} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} -(\omega^2)^3 + 406,737 (\omega^2)^2 - 40269,264 \omega^2 + 134548,352 \\ + 20\,413,006 \omega^2 - 194891,922 \\ + 1483,107 \omega^2 + 81350,430 \end{array} \right.$$

$$= -(\omega^2)^3 + 406,737 (\omega^2)^2 - 18373,151 \omega^2 - 21006,86$$

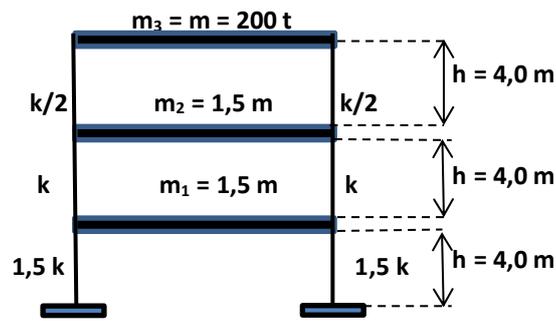
$$-(\omega^2)^3 + 406,737 (\omega^2)^2 - 18373,151 \omega^2 - 21006,86 = 0 \rightarrow \text{Equation de degré 3 en } \omega^2$$

La résolution de cette équation, appelée *équation des fréquences*, fournit les valeurs des pulsations ω_1 , ω_2 et ω_3 . Elle donne n racines réelles correspondant aux n pulsations (fréquences naturelles) du système. La fréquence la plus basse du système se nomme *fréquence fondamentale* et la période correspondante (la plus élevée) s'appelle *période fondamentale du système*.

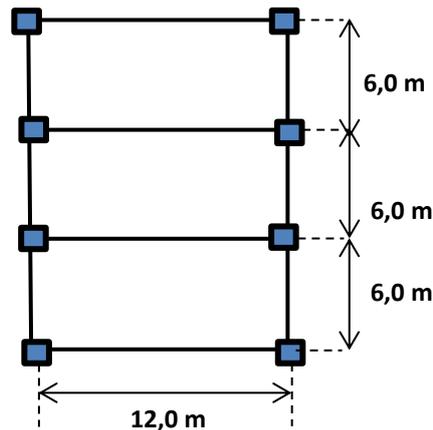
2.2. Evaluation des efforts dans un portique à trois niveaux par la méthode du spectre de réponse

2.2.1. Présentation de l'ouvrage

Pour illustrer la méthode du spectre de réponse, on considère un bâtiment (R + 2) à trois niveaux contreventés par des portiques en béton armé. Les planchers sont supposés infiniment rigides dans leur plan. À titre de simplification, les poteaux sont supposés posséder une grande raideur axiale et de flexion. Dans ces conditions, les seuls déplacements possibles des nœuds sont des translations horizontales. Le système représenté ci-dessous possède donc trois degrés de liberté. Ce bâtiment, parfaitement encastré en pied, est soumis à un séisme défini par son spectre de réponse.



(a) Vue en élévation



(b) Vue en plan

Figure 3a.1: Présentation du bâtiment

2.2.2. Coefficients sismiques

Les caractéristiques sismiques du bâtiment sont :

- Groupe d'usage 2 (bâtiment à usage d'habitation)
- Catégorie S2 (bâtiment implanté sur un site ferme)
- Zone III (zone de forte sismicité)
- Coefficient de comportement : $R = 3,5$
- Module d'Young : $E = 3,2 \times 10^7$ MPa
- Coefficient d'accélération de zone : $A = 0,25$
- Coefficient d'amortissement : $\xi = 7 \%$
- Facteur de correction d'amortissement (pour $\xi \neq 5 \%$) : $\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} \geq 0,7 \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{7}{2+7}} = 0,88$
- Coefficient de pondération des charges d'exploitation : $\beta = 0,2$
- Facteur de qualité : $Q = 1,1$
- Périodes caractéristiques associées à la catégorie du site : $T_1 = 0,15$ sec et $T_2 = 0,40$ sec
- $g = 9,81$ m/s²

2.2.3. Travail demandé

Partie A

Pour cette première partie, il s'agit de :

- Modéliser la structure du bâtiment.
- Déterminer les matrices de masse et de rigidité.
- Calculer les fréquences de vibration sans amortissement de cette structure.
- Sur la base des fréquences ainsi calculées, déterminer les formes des modes de vibration correspondants.
- Normaliser ces modes.
- Calculer la masse généralisée pour chaque mode vibratoire.
- Calculer les facteurs de participation modaux.
- Evaluer la masse modale pour chaque mode.

Partie B

Le bâtiment, initialement au repos, est soumis à un séisme ayant le spectre de réponse décrit par les équations suivantes (spectre de calcul du RPA99/2003) :

$$S_a(T)/g = \begin{cases} 1,25 A \left[1 + \frac{T}{T_1} \left(2,5 \eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right] & \rightarrow 0 \leq T \leq T_1 \\ 2,5 \eta \left(1,25 A \right) \left(\frac{Q}{R} \right) & \rightarrow T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2,5 \eta \left(1,25 A \right) \left(\frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & \rightarrow T_2 \leq T \leq 3,0 \text{ sec} \\ 2,5 \eta \left(1,25 A \right) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \left(\frac{Q}{R} \right) & \rightarrow T > 3,0 \text{ sec} \end{cases}$$

En supposant que la structure demeure dans le domaine linéaire pendant le séisme avec 7 % d'amortissement critique pour chaque mode :

- Déterminez les accélérations spectrales pour chaque mode de vibration.
- Calculer les déplacements relatifs maximaux des étages pour chaque mode.
- Évaluez l'énergie potentielle emmagasinée dans la structure lors du mouvement.
- Calculer le cisaillement maximum à la base de la structure pour chaque mode vibratoire.
- En utilisant la règle de superposition quadratique, estimer le cisaillement maximum probable à la base de la structure.

Partie C

En utilisant la méthode statique équivalente :

- Calculez l'effort tranchant V à la base conformément au RPA99/2003.
- Vérifiez que le cisaillement maximum probable obtenu par combinaison des valeurs modales n'est pas inférieur à 80 % de V .

2.2.3. Réponse

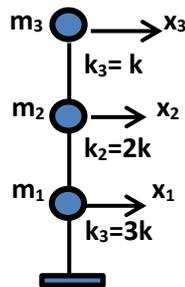
Partie A

1. Modélisation de la structure

Le bâtiment, comportant trois niveaux, est modélisé par une console verticale à 3 degrés de liberté.

$$k = 1,2 \times 10^5 \text{ kN/m}$$

$$m = 200 \text{ t}$$



2. Détermination des matrices de rigidité et de masse

La matrice de rigidité de la structure du bâtiment peut être déterminée en imposant un déplacement unité à chaque nœud, puis en calculant les forces résultantes. Comme les planchers sont supposés infiniment rigides, les forces à chaque nœud peuvent être facilement estimées par simple addition des coefficients de rigidité latérale.

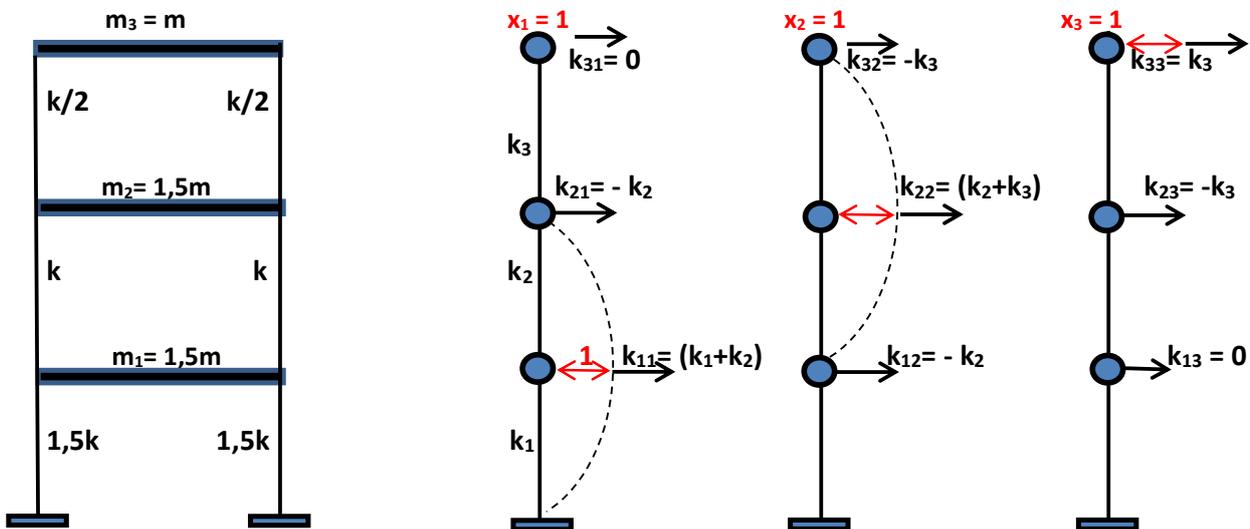


Figure 3a.2 : Coefficients de rigidité de la matrice K

Avec les valeurs de raideur des poteaux et des masses indiquées sur la Figure 3a.2, les matrices de masse et de rigidité de la structure s'écrivent :

$$M = \begin{bmatrix} 1,5m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 200 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tonnes}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

3. Calcul des fréquences propres

Les fréquences naturelles du système sont solutions de l'équation :

$$[K - M\omega^2] = 0$$

Ce qui donne :

$$[K - M\omega^2] = \begin{bmatrix} 5k - 1,5m\omega^2 & -2k & 0 \\ -2k & 3k - 1,5m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - 1,5\frac{m}{k}\omega^2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 1,5\frac{m}{k}\omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \frac{m}{k}\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

En posant $A = \frac{m}{k}\omega^2$, les fréquences propres de la structure sont données par l'équation du troisième degré, obtenue en annulant le déterminant de la matrice :

$$2,25 A^3 - 14,25 A^2 + 21,5 A - 6 = 0$$

Les solutions en sont :

- $A_1 = 0,361$
- $A_2 = 1,756$
- $A_3 = 4,218$

On en déduit les carrés des pulsations et le vecteur des pulsations :

$$\left. \begin{array}{l} \omega_1^2 = 0,361 \times \frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = 0,601 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2^2 = 1,756 \times \frac{k}{m} \rightarrow \omega_2 = 1,325 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3^2 = 4,218 \times \frac{k}{m} \rightarrow \omega_3 = 2,054 \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array} \right\} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \begin{bmatrix} 0,601 \\ 1,325 \\ 2,054 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = 0,601 \sqrt{\frac{k}{m}} & \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 10,45 \sqrt{\frac{m}{k}} & \rightarrow f_1 = 0,096 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1,325 \sqrt{\frac{k}{m}} & \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 4,74 \sqrt{\frac{m}{k}} & \rightarrow f_2 = 0,211 \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = 2,054 \sqrt{\frac{k}{m}} & \rightarrow T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = 3,06 \sqrt{\frac{m}{k}} & \rightarrow f_3 = 0,327 \sqrt{\frac{k}{m}} \end{array}$$

4. Calcul des vecteurs propres

Les modes propres représentent les solutions de l'expression suivante :

$$[K - M\omega_j^2] D^{(j)} = [0]$$

- **Premier mode de vibration ($\omega_1^2 = 0,361 \times \frac{k}{m}$)**

Pour ce mode, l'équation précédente s'écrit :

$$[K - M\omega_1^2] D^{(1)} = [0] \rightarrow \begin{bmatrix} 5 - 0,5415 & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 0,5415 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 0,361 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \\ D_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4,4585 & -2 & 0 \\ -2 & 2,4585 & -1 \\ 0 & -1 & 0,639 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \\ D_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on pose $D_1^{(1)} = 1$, il vient :

$$D_2^{(1)} = 2,229$$

$$D_3^{(1)} = 3,488$$

- **Deuxième mode de vibration ($\omega_2^2 = 1,756 \times \frac{k}{m}$)**

$$[K - M\omega_2^2] D^{(2)} = [0] \rightarrow \begin{bmatrix} 5 - 2,634 & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 2,634 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 1,756 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \\ D_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2,366 & -2 & 0 \\ -2 & 0,366 & -1 \\ 0 & -1 & 0,756 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \\ D_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on pose $D_1^{(2)} = 1$, alors :

$$D_2^{(2)} = + 1,183$$

$$D_3^{(2)} = - 1,565$$

- **Troisième mode de vibration ($\omega_3^2 = 4,218 \times \frac{k}{m}$)**

$$[K - M\omega_3^2] D^{(3)} = [0] \rightarrow \begin{bmatrix} 5 - 6,327 & -2 & 0 \\ -2 & 3 - 6,327 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 4,218 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(3)} \\ D_2^{(3)} \\ D_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1,327 & -2 & 0 \\ -2 & -3,327 & -1 \\ 0 & -1 & -3,218 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(3)} \\ D_2^{(3)} \\ D_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on pose $D_1^{(3)} = 1$, alors :

$$D_2^{(3)} = - 0,663$$

$$D_3^{(3)} = + 0,206$$

Ces modes de vibration, obtenus en normant le déplacement du premier nœud à 1 dans tous les modes, sont représentés par la figure ci-dessous.

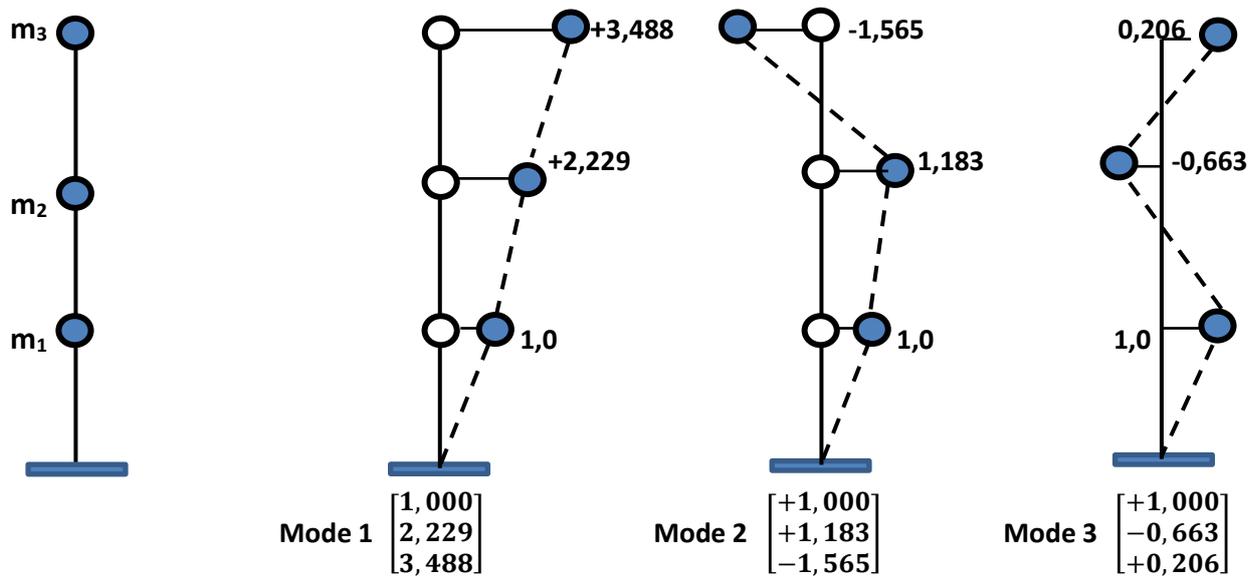


Figure 3a.3 : Allure des trois modes de vibration

5. Normalisation des modes vibratoires

Un mode de vibration $D^{(i)}$ peut être normalisé de la façon suivante : $[D^{(i)}]^T [M] [D^{(i)}] = [1]$

Les modes normalisés de cette manière sont dits *orthonormaux* par rapport à la matrice de masse.

- Pour le mode 1 $\begin{bmatrix} 1,000 \\ 2,229 \\ 3,488 \end{bmatrix}$

$$[D^{(1)}]^T [M] [D^{(1)}] = [1 \quad 2,229 \quad 3,488] \begin{bmatrix} 1,5m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,000 \\ 2,229 \\ 3,488 \end{bmatrix} = 21,119 \text{ m}$$

En divisant les éléments de $D^{(1)}$ par la racine carrée de ce facteur, on obtient un mode normalisé :

$$D^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,218 \\ 0,486 \\ 0,760 \end{bmatrix}$$

- Pour le mode 2 $\begin{bmatrix} +1,000 \\ +1,183 \\ -1,565 \end{bmatrix}$

$$[D^{(2)}]^T [M] [D^{(2)}] = [1 \quad 1,183 \quad -1,565] \begin{bmatrix} 1,5m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1,000 \\ +1,183 \\ -1,565 \end{bmatrix} = 6,05 \text{ m}$$

En divisant les éléments de $D^{(2)}$ par $\sqrt{6,05m}$, on obtient un mode normalisé, soit :

$$D^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} +0,406 \\ +0,480 \\ -0,635 \end{bmatrix}$$

- Pour le mode 3 $\begin{bmatrix} +1,000 \\ -0,663 \\ +0,206 \end{bmatrix}$

$$[D^{(3)}]^T [M] [D^{(3)}] = [1 \quad -0,663 \quad 0,206] \begin{bmatrix} 1,5m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1,000 \\ -0,663 \\ +0,206 \end{bmatrix} = 2,20 \text{ m}$$

En divisant les éléments de $D^{(3)}$ par $\sqrt{2,2m}$, on obtient :

$$D^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} +0,674 \\ -0,447 \\ +0,139 \end{bmatrix}$$

6. Calcul des masses généralisées

- Mode 1

$$M_1 = [D^{(1)}]^T [M] [D^{(1)}] = 21,119 \text{ m}$$

- Mode 2

$$M_2 = [D^{(2)}]^T [M] [D^{(2)}] = 6,05 \text{ m}$$

- Mode 3

$$M_3 = [D^{(3)}]^T [M] [D^{(3)}] = 2,20 \text{ m}$$

7. Calcul des facteurs de participation modaux

- Mode 1

$$a_1 = \frac{[D^{(1)}]^T [M] [\Delta]}{[D^{(1)}]^T [M] [D^{(1)}]} = \frac{[D^{(1)}]^T [M] [\Delta]}{M_1} = \frac{1}{21,119} [1 \quad 2,229 \quad 3,488] \begin{bmatrix} 1,5m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{8,3315}{21,119} = 0,394$$

- Mode 2

$$a_2 = \frac{[D^{(2)}]^T [M] [\Delta]}{[D^{(2)}]^T [M] [D^{(2)}]} = \frac{[D^{(2)}]^T [M] [\Delta]}{M_2} = \frac{1}{6,05} [1 \quad 1,183 \quad -1,565] \begin{bmatrix} 1,5m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \frac{1,71}{6,05} = 0,283$$

- Mode 3

$$a_3 = \frac{[D^{(3)}]^T [M] [\Delta]}{[D^{(3)}]^T [M] [D^{(3)}]} = \frac{[D^{(3)}]^T [M] [\Delta]}{M_3} = \frac{1}{6,05} [1 \quad -0,663 \quad 0,206] \begin{bmatrix} 1,5m & 0 & 0 \\ 0 & 1,5m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \frac{0,711}{2,20} = 0,323$$

8. Calcul des masses modales

- Pour le mode 1

$$m_{\text{mod},1} = a_1^2 M_1 = (0,394)^2 \times 21,119 \text{ m} = 3,2784 \approx 3,28 \text{ m}$$

- Pour le mode 2

$$m_{\text{mod},2} = a_2^2 M_2 = (0,283)^2 \times 6,05 \text{ m} = 0,484 \text{ m}$$

- **Pour le mode 3**

$$m_{\text{mod},3} = a_3^2 M_3 = (0,323)^2 \times 2,2 \text{ m} = 0,229 \text{ m}$$

Vérification

$$\sum_{i=1}^3 m_{\text{mod},i} = 3,28 \text{ m} + 0,484 \text{ m} + 0,229 \text{ m} = 3,992 \text{ m}$$

$$m_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^3 m_i = 4 \text{ m}$$

$$\sum_{i=1}^3 m_{\text{mod},i} \approx m_{\text{tot}} *$$

(*) Remarque

La masse modale permet de quantifier l'erreur commise en ne retenant que K modes ($K < N$) pour l'évaluation de la réponse de la structure. Plus la masse modale des modes négligés est faible, plus l'erreur commise est faible.

En pratique, lorsqu'on s'intéresse à la réponse globale (réponse d'ensemble) de la structure, on admet que nous avons une bonne estimation de celle-ci avec K modes, si $\sum_{i=1}^K m_{\text{mod},i} \geq 0,9 m_{\text{tot}}$.

Partie B

1. Calcul des accélérations spectrales

À l'aide du spectre de réponse de calcul, on en déduit les accélérations spectrales.

- **Pour le premier mode**

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 10,45 \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (m = 200 \text{ t et } k = 1,2 \times 10^5 \text{ kN/m})$$

$$T_1 = 10,45 \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{1,2 \times 10^5 \times 10^3}} = 0,427 \text{ s} \rightarrow 0,4 \text{ s} \leq T^{(1)} \leq 3,0 \text{ s} \rightarrow \frac{S_{a,1}}{g} = 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{Q}{R}\right) \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3}$$

Sachant que :

$$Q = 1,1$$

$$T_1 = 0,15 \text{ s}$$

$$T_2 = 0,40 \text{ s}$$

$$\eta = 0,88$$

$$A = 0,25$$

$$R = 3,5$$

Il vient :

$$\frac{S_{a,1}}{g} = 2,5 \times 0,88 \times 1,25 \times 0,25 \times \left(\frac{1,1}{3,5}\right) \left(\frac{0,40}{0,427}\right)^{2/3} = 0,207$$

$$\frac{S_{a,1}}{g} = 0,207 \rightarrow S_{a,1} = 0,207 \text{ g} = 2,03 \text{ m/s}^2$$

$$S_{a,1} = 2,03 \text{ m/s}^2$$

- Pour le deuxième mode

$$T^{(2)} = \frac{2\pi}{\omega_2} = 4,74 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^{(2)} = 4,74 \sqrt{\frac{200}{1,2 \times 10^5}} = 0,19 \text{ s} \rightarrow 0,15 \text{ s} \leq T^{(2)} \leq 0,40 \text{ s} \rightarrow \frac{S_{a,2}}{g} = 2,5 \eta (1,25 \text{ A}) \left(\frac{Q}{R}\right)$$

$$\frac{S_{a,2}}{g} = 2,5 \times 0,88 \times 1,25 \times 0,25 \times \frac{1,1}{3,5} = 0,22$$

$$\frac{S_{a,2}}{g} = 0,22 \rightarrow S_{a,2} = 0,22 \text{ g} = 2,16 \text{ m/s}^2$$

$$S_{a,2} = 2,16 \text{ m/s}^2$$

- Pour le troisième mode

$$T^{(3)} = \frac{2\pi}{\omega_3} = 3,06 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T^{(3)} = 3,06 \sqrt{\frac{200}{1,2 \times 10^5}} = 0,125 \text{ s} \rightarrow 0 \leq T^{(3)} \leq T_1 \rightarrow \frac{S_{a,3}}{g} = 1,25 \text{ A} \left[1 + \frac{T}{T_1} (2,5 \eta \frac{Q}{R} - 1)\right]$$

$$\frac{S_{a,3}}{g} = 1,25 \times 0,25 \left[1 + \frac{0,125}{0,150} (2,5 \times 0,88 \times \frac{1,1}{3,5} - 1)\right] = 0,232$$

$$\frac{S_{a,3}}{g} = 0,232 \rightarrow S_{a,3} = 0,232 \text{ g} = 2,276 \text{ m/s}^2$$

$$S_{a,3} \approx 2,28 \text{ m/s}^2$$

2. Calcul des déplacements maximaux relatifs des étages

Il s'agit de calculer la réponse maximale (déplacements relatifs maximaux des masses) de chaque degré de liberté i dans chaque mode de vibration j . Elle est donnée par :

$$x_{i, \max}^{(j)} = D_i^{(j)} a_j S_D^{(j)} = \frac{D_i^{(j)} a_j S_a^{(j)}}{\omega_j^2}$$

où,

$$S_D : \text{spectre de réponse en déplacement relatif} \rightarrow S_D^{(j)} = \frac{S_a^{(j)}}{\omega_j^2}$$

S_a : spectre de réponse en pseudo-accélération

$$D^{(1)} \begin{bmatrix} 1,000 \\ 2,229 \\ 3,488 \end{bmatrix}$$

$$D^{(2)} \begin{bmatrix} +1,000 \\ +1,183 \\ -1,565 \end{bmatrix}$$

$$D^{(3)} \begin{bmatrix} +1,000 \\ -0,663 \\ +0,206 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 0,394$$

$$a_2 = 0,283$$

$$a_3 = 0,323$$

$$S_{a,1} = 2,03 \text{ m/s}^2$$

$$S_{a,2} = 2,16 \text{ m/s}^2$$

$$S_{a,3} = 2,28 \text{ m/s}^2$$

$$\omega_1^2 = 216,6$$

$$\omega_2^2 = 1053,6$$

$$\omega_3^2 = 2530,8$$

- Premier mode

$$x_{1, \max}^{(1)} = \frac{(1,000)(0,394)(2,03)}{216,6} = 3,6926 \text{ mm} \approx 3,7 \text{ mm}$$

$$x_{1, \max}^{(1)} = 3,7 \text{ mm}$$

$$X_{2,\max}^{(1)} = \frac{(2,229)(0,394)(2,03)}{216,6} = 8,23 \text{ mm}$$

$$x_{2,\max}^{(1)} = \mathbf{8,23 \text{ mm}}$$

$$X_{3,\max}^{(1)} = \frac{(3,488)(0,394)(2,03)}{216,6} = 12,88 \text{ mm} \approx 12,9 \text{ mm}$$

$$x_{3,\max}^{(1)} = \mathbf{12,9 \text{ mm}}$$

- **Deuxième mode**

$$X_{1,\max}^{(2)} = \frac{(1,000)(0,283)(2,16)}{1053,6} = 0,58 \text{ mm} \approx 0,6 \text{ mm}$$

$$x_{1,\max}^{(2)} = \mathbf{0,6 \text{ mm}}$$

$$X_{2,\max}^{(2)} = \frac{(1,183)(0,283)(2,16)}{1053,6} = 0,686 \text{ mm} \approx 0,7 \text{ mm}$$

$$x_{2,\max}^{(2)} = \mathbf{0,7 \text{ mm}}$$

$$X_{3,\max}^{(2)} = \frac{(-1,565)(0,283)(2,16)}{1053,6} = -0,9 \text{ mm}$$

$$x_{3,\max}^{(2)} = \mathbf{-0,9 \text{ mm}}$$

- **Troisième mode**

$$X_{1,\max}^{(3)} = \frac{(1,000)(0,323)(2,28)}{2530,8} = 0,29 \text{ mm} \approx 0,3 \text{ mm}$$

$$x_{1,\max}^{(3)} = \mathbf{0,3 \text{ mm}}$$

$$X_{2,\max}^{(3)} = \frac{(-0,663)(0,323)(2,28)}{2530,8} = -0,19 \text{ mm} \approx -0,2 \text{ mm}$$

$$x_{2,\max}^{(3)} = \mathbf{-0,2 \text{ mm}}$$

$$X_{3,\max}^{(3)} = \frac{(0,206)(0,323)(2,28)}{2530,8} = 0,059 \text{ mm} \approx 0,06 \text{ mm}$$

$$x_{3,\max}^{(3)} = \mathbf{0,06 \text{ mm}}$$

Pour un mode donné j, les déplacements relatifs maximaux se trouvent dans le tableau ci-après :

Déplacements horizontaux maximaux (mm)			
Mode	1	2	3
x_{1, max}	3,70	+0,60	+0,30
x_{2, max}	8,23	+0,70	-0,20
x_{3, max}	12,9	-0,90	+0,06

3. Evaluation de l'énergie potentielle emmagasinée dans la structure durant les vibrations

Pour un mode j, l'énergie emmagasinée est donnée par l'expression :

$$E^{(j)} = \frac{1}{2} [X^{(j)}]^T [K] [X^{(j)}]$$

Où,

$[X^{(j)}]^T$: vecteur transposé du vecteur $[X^{(j)}]$ des déplacements relatifs maximum suivant le mode j.

- **Mode 1**

$$E^{(1)} = \frac{1}{2} [3,70 \quad 8,23 \quad 12,9] \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,70 \\ 8,23 \\ 12,9 \end{bmatrix}$$

$$E^{(1)} = \frac{1}{2} \times 1,2 \times 10^5 \times 10^{-6} = [3,70 \quad 8,23 \quad 12,9] \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,70 \\ 8,23 \\ 12,9 \end{bmatrix}$$

$$E^{(1)} = \frac{1,2 \times 10^{-1}}{2} \times 103,9207 = 6,23$$

$$E^{(1)} = 6,23$$

- **Mode 2**

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} [0,6 \quad 0,7 \quad -0,9] \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0,6 \\ +0,7 \\ -0,9 \end{bmatrix}$$

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \times 1,2 \times 10^5 \times 10^{-6} = [0,6 \quad 0,7 \quad -0,9] \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,7 \\ -0,9 \end{bmatrix}$$

$$E^{(2)} = \frac{1,2 \times 10^{-1}}{2} \times 3,57 = 0,21$$

$$E^{(2)} \approx 0,21$$

- **Mode 3**

$$E^{(3)} = \frac{1}{2} [0,3 \quad -0,2 \quad 0,06] \begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +0,3 \\ -0,2 \\ 0,06 \end{bmatrix}$$

$$E^{(3)} = \frac{1}{2} \times 1,2 \times 10^5 \times 10^{-6} = [0,3 \quad -0,2 \quad 0,06] \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 \\ -0,2 \\ 0,06 \end{bmatrix}$$

$$E^{(3)} = \frac{1,2 \times 10^{-1}}{2} \times 3,1056 = 0,186$$

$$E^{(3)} \approx 0,186$$

Le premier mode est pris comme référence, par conséquent, les énergies ont pour valeur relative :

$$\left. \begin{array}{l} - \text{ Mode 1 : } E^{(1)} = 100 \\ - \text{ Mode 2 : } E^{(2)} = 3,37 \\ - \text{ Mode 3 : } E^{(3)} = 2,98 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Mode 1 prépondérant}$$

4. Forces maximales pour chaque mode

Les forces sismiques équivalentes pour chaque mode vibratoire sont obtenues en multipliant les réponses modales maximales par la matrice de rigidité K. Soit :

$$[F^{(j)}]_{\max} = [K] [X^{(j)}]_{\max}$$

- **Premier mode**

$$\begin{bmatrix} F_{1,\max}^{(1)} \\ F_{2,\max}^{(1)} \\ F_{3,\max}^{(1)} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,70 \\ 8,23 \\ 12,9 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2,04 \\ 4,39 \\ 4,67 \end{bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{bmatrix} 244,8 \\ 526,8 \\ 560,4 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

- **Deuxième mode**

$$\begin{bmatrix} F_{1,\max}^{(2)} \\ F_{2,\max}^{(2)} \\ F_{3,\max}^{(2)} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,60 \\ 0,70 \\ -0,9 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1,60 \\ 1,80 \\ -1,6 \end{bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{bmatrix} 192 \\ 216 \\ -192 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

- **Troisième mode**

$$\begin{bmatrix} F_{1,\max}^{(3)} \\ F_{2,\max}^{(3)} \\ F_{3,\max}^{(3)} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,30 \\ -0,2 \\ 0,06 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1,90 \\ -1,26 \\ 0,26 \end{bmatrix} \times 10^{-3} = \begin{bmatrix} 228 \\ -151,2 \\ 31,2 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

5. Forces sismiques maximales pour chaque niveau

Les forces sismiques équivalentes pour chaque niveau de la structure peuvent être estimées en utilisant la règle de superposition quadratique RCSC (racine carrée de la somme des carrés ou

encore SRSS) : $F_{i,\max,\text{tot}} = \sqrt{\sum_{n=1}^3 [F_{n,\max}^{(j)}]^2}$

$$F_{1,\max,\text{tot}} = \sqrt{(F_{1,\max}^{(1)})^2 + (F_{1,\max}^{(2)})^2 + (F_{1,\max}^{(3)})^2} = \sqrt{244,8^2 + 192^2 + 228^2} = 385,71 \text{ kN}$$

$$\mathbf{F_{1,\max,\text{tot}} = 386 \text{ kN}}$$

$$F_{2,\max,\text{tot}} = \sqrt{(F_{2,\max}^{(1)})^2 + (F_{2,\max}^{(2)})^2 + (F_{2,\max}^{(3)})^2} = \sqrt{526,8^2 + 216^2 + 151,2^2} = 589,09 \text{ kN}$$

$$\mathbf{F_{2,\max,\text{tot}} = 589 \text{ kN}}$$

$$F_{3,\max,\text{tot}} = \sqrt{(F_{3,\max}^{(1)})^2 + (F_{3,\max}^{(2)})^2 + (F_{3,\max}^{(3)})^2} = \sqrt{560,4^2 + 192^2 + 31,2^2} = 593,19 \text{ kN}$$

$$\mathbf{F_{3,\max,\text{tot}} = 593 \text{ kN}}$$

6. Effort tranchant maximal à la base de la structure pour chaque mode

$$\mathbf{\text{Mode 1 : } V_{\max}^{(1)} = 244,8 + 526,8 + 560,4 = 1323 \text{ kN}}$$

$$\mathbf{V_{\max}^{(1)} = 1323 \text{ kN}}$$

$$\mathbf{\text{Mode 2 : } V_{\max}^{(2)} = 192 + 216 - 192 = 216 \text{ kN}}$$

$$\mathbf{V_{\max}^{(2)} = 216 \text{ kN}}$$

$$\mathbf{\text{Mode 3 : } V_{\max}^{(3)} = 228 - 151,2 + 31,2 = 108 \text{ kN}}$$

$$\mathbf{V_{\max}^{(3)} = 108 \text{ kN}}$$

On constate que le premier mode est dominant dans l'estimation du cisaillement à la base. Dans ce mode, les forces sismiques sont réparties à peu près linéairement.

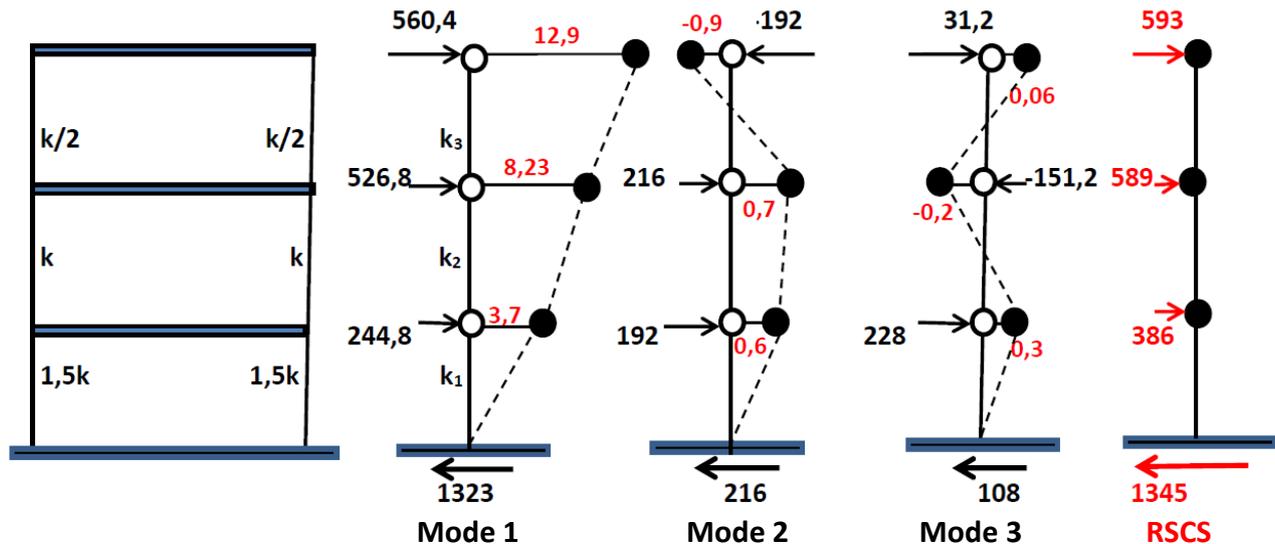
7. Effort tranchant maximal probable à la base de la structure

Le cisaillement maximum probable à la base peut être estimé par la combinaison quadratique.

$$[V_{\max}]_{\max} = \sqrt{(V_{\max}^1)^2 + (V_{\max}^2)^2 + (V_{\max}^3)^2} = \sqrt{1323^2 + 216^2 + 108^2} = 1344,86 \text{ kN} \approx 1345 \text{ kN}$$

$$[V_{\max}]_{\max} = 1345 \text{ kN}$$

Récapitulatif



Partie C

1. Calcul de l'effort tranchant à la base de la structure par la méthode statique équivalente

L'effort tranchant V à la base est donné par l'expression :

$$V = \frac{A D Q}{R} W$$

Où,

- $A = 0,25 \rightarrow$ Zone III + groupe d'usage 2
- $Q = 1,1 \rightarrow$ Critères 2 et 5 non observés
- $R = 3,5 \rightarrow$ Bâtiment constitué de portiques reprenant la totalité des charges verticales et horizontales avec remplissage composé de murs en maçonnerie.
- $T_1 = 0,15 \text{ s}$ et $T_2 = 0,40 \text{ s} \rightarrow$ Site ferme
- $\xi = 7\% \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{7}{2+\eta}} = 0,88$

- $W = 4 \times m \times g = 4 \times 200 \times 9,81 = 7848 \text{ kN}$

- D ?

Période de vibration : $T = C_t \times H^{3/4}$ ($C_t = 0,05$ pour portique en béton armé + maçonnerie)

$$T = 0,05 \times 12^{3/4} = 0,32 \text{ s} \rightarrow 0 \leq T \leq T_2 \rightarrow D = 2,5 \eta = 2,2$$

L'effort tranchant à la base est donc égal à :

$$V = \frac{0,25 \times 2,2 \times 1,1}{3,5} \times 7848 = 1356,58 \text{ kN} \approx 1357 \text{ kN}$$

V = 1357 kN

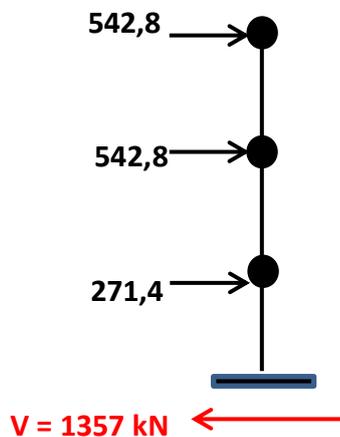
2. Répartition de V aux différents niveaux

Force au niveau i :

$$F_i = V \frac{m_i h_i}{\sum m_j h_j} \rightarrow \sum m_j h_j = m h (1,5 + 3 + 3) = 7,5h$$

D'où :

- $F_1 = 1357 \times 1,5/7,5 = 271,4 \text{ kN}$
- $F_2 = 1357 \times 3/7,5 = 542,8 \text{ kN}$
- $F_3 = 1357 \times 3/7,5 = 542,8 \text{ kN}$

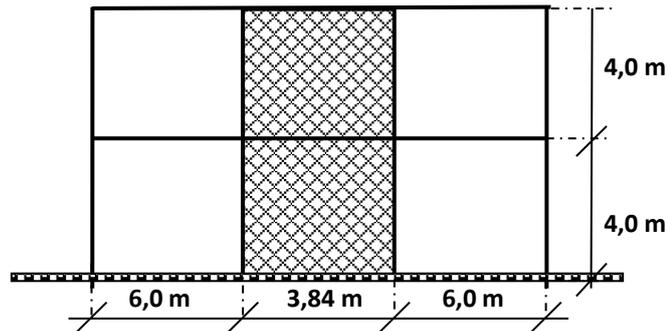


2.3. Evaluation du cisaillement à la base d'un refend par la méthode modale

2.3.1. Présentation de l'ouvrage

Le bâtiment à analyser est à usage de bureaux, implanté sur un site meuble dans une zone de moyenne sismicité. C'est un bâtiment régulier, composé de deux niveaux contreventés par deux refends en béton armé dans chaque direction. Chaque refend possède les caractéristiques suivantes :

- 30 cm d'épaisseur
- 384 cm de largeur $\rightarrow 1,42 \text{ m}^4$ d'inertie
- Module d'élasticité : $3,2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$



2.3.2. Données sismiques

Les caractéristiques sismiques du bâtiment sont :

- Groupe d'usage 2 (bâtiment à usage de bureaux)
- Catégorie S3 (bâtiment implanté sur un site meuble)
- Zone IIb (zone de moyenne sismicité)
- Coefficient de comportement : $R = 3,5$
- Module d'Young : $E = 3,2 \times 10^7$ MPa
- Coefficient d'accélération de zone : $A = 0,20$
- Coefficient d'amortissement : $\xi = 10 \%$
- Facteur de correction d'amortissement (pour $\xi \neq 5 \%$) : $\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} \geq 0,7 \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{7}{2+10}} = 0,76$
- Coefficient de pondération des charges d'exploitation : $\beta = 0,2$
- Facteur de qualité : $Q = 1,1$
- Périodes caractéristiques associées à la catégorie du site : $T_1 = 0,15$ sec et $T_2 = 0,50$ sec
- $g = 9,81$ m/s²

2.3.3. Charges et surcharges

1. Charges permanentes

Niveau 1 : $g_1 = 130$ t

Niveau 2 : $g_2 = 107$ t

2. Surcharges d'exploitation

Niveau 1 : $q_1 = 70$ t

Niveau 2 : $q_2 = 65$ t

3. Poids des différents niveaux : $g + \beta q$

$m_1 = 130 + 0,2 \times 70 = 144$ t = 1,2 m

$m_2 = 107 + 0,2 \times 65 = 120$ t = m

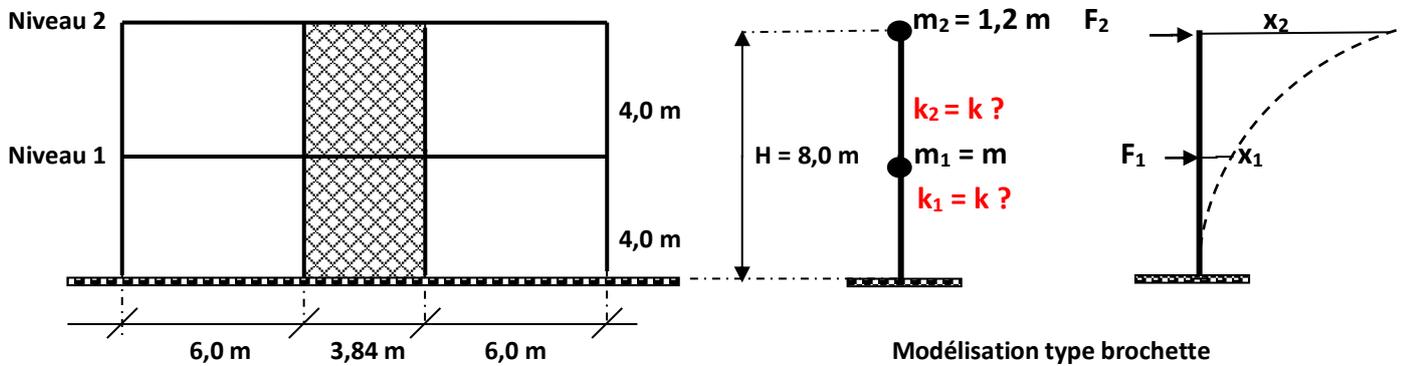
2.3.4. Travail demandé

Il s'agit de :

- Modéliser la structure du bâtiment.
- Déterminer les matrices de masse et de rigidité.
- Calculer les fréquences de vibration sans amortissement de cette structure.
- Sur la base des fréquences ainsi calculées, déterminer les formes des modes de vibration correspondants.

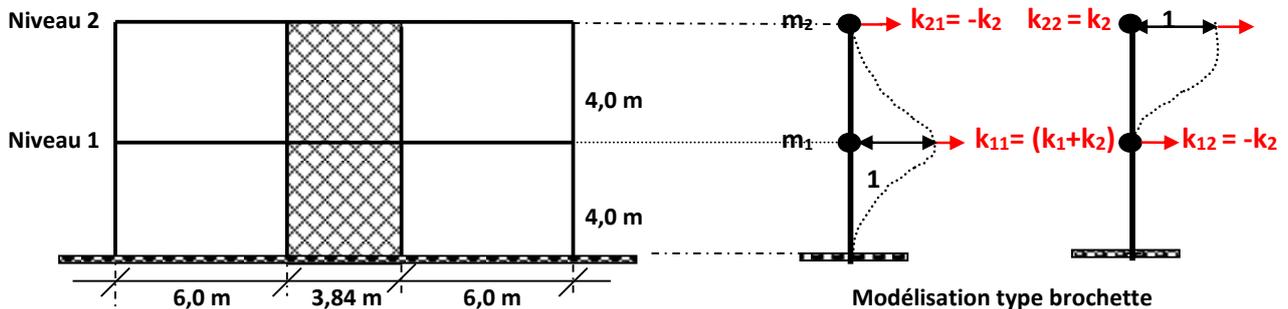
2.3.5. Réponse

1. Modélisation de la structure du bâtiment



2. Matrices de masse et de rigidité

Le refend de contreventement est assimilé à une console de hauteur $H = 8,0$ m, encadrée à sa base et soumise aux forces concentrées F_1 , et F_2 . La matrice de rigidité de la structure du bâtiment est déterminée en appliquant un déplacement unitaire à chaque niveau, et en calculant les forces résultantes.



Les matrices de rigidité et de masse s'écrivent :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ t}$$

3. Evaluation des modes propres de vibration

3.1. Fréquences propres

Les fréquences propres du modèle sont données par l'équation :

$$|K - M\omega^2| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2k - 1,2 m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 - 1,2 \frac{m}{k} \omega^2 & -1 \\ -1 & 1 - \frac{m}{k} \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2 - 1,2 \times \frac{m}{k} \omega^2) (1 - \frac{m}{k} \omega^2) - 1 = 0 \rightarrow (2 - 1,2 A) (1 - A) - 1 = 0 \rightarrow 1,2 A^2 - 3,2 A + 1 = 0 \quad (A = \frac{m}{k} \omega^2)$$

Les fréquences propres du système sont les solutions de l'équation du second degré ci-dessus :

$$A_1 = 0,36 \rightarrow \omega_1^2 = 0,36 \times \frac{k}{m} \rightarrow \omega_1 = 0,6 \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 10,47 \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow f_1 = 1,05 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$A_2 = 2,31 \rightarrow \omega_2^2 = 2,31 \times \frac{k}{m} \rightarrow \omega_2 = 1,5 \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 4,19 \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow f_2 = 0,24 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3.2. Vecteurs propres

Les vecteurs propres sont déterminés à partir de l'expression :

$$[K - M\omega_j^2] D^{(j)} = 0$$

- **Pour le premier mode de vibration ($\omega_1^2 = 0,36 \times \frac{k}{m}$)**

Pour ce mode, l'expression précédente s'écrit :

$$[K - M\omega_1^2] D^{(1)} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2k - 1,2m\omega_1^2 & -k \\ -k & k - m\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 1,2 \frac{m}{k} \omega_1^2 & -1 \\ -1 & 1 - \frac{m}{k} \omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1,568 & -1 \\ -1 & 0,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(1)} \\ D_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on suppose que $D_1^{(1)} = 1 \rightarrow D_2^{(1)} = 1,568$

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,568 \end{bmatrix}$$

- **Pour le deuxième mode de vibration ($\omega_2^2 = 2,31 \times \frac{k}{m}$)**

Pour ce mode, l'expression précédente s'écrit :

$$[K - M\omega_2^2] D^{(2)} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 2k - 1,2m\omega_2^2 & -k \\ -k & k - m\omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

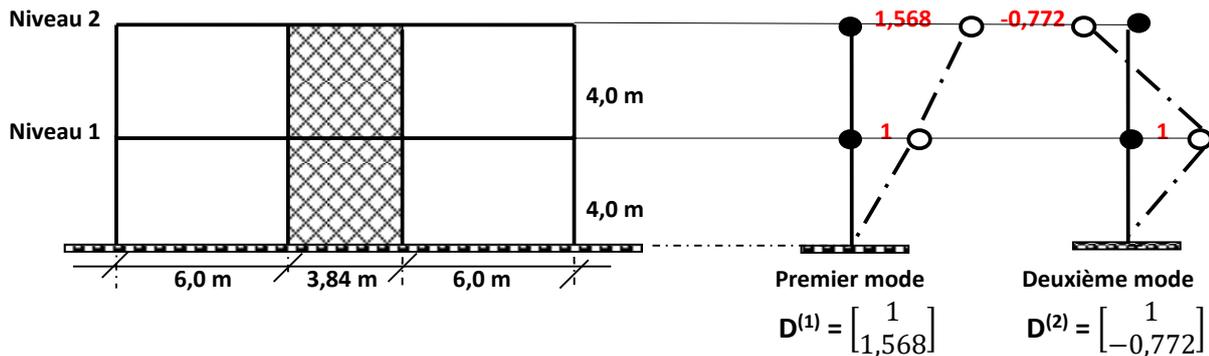
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 - 1,2 \frac{m}{k} \omega_2^2 & -1 \\ -1 & 1 - \frac{m}{k} \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0,772 & -1 \\ -1 & -1,31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{(2)} \\ D_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on suppose que $D_1^{(2)} = 1 \rightarrow D_2^{(2)} = -0,772$

$$D^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,772 \end{bmatrix}$$

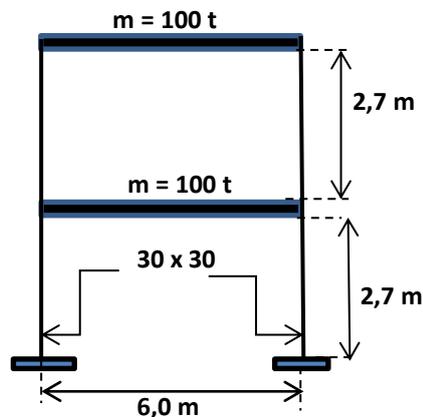
L'allure de ces deux modes de vibration est représentée par la figure suivante :



2.4. Evaluation des forces maximales à chaque niveau d'un portique par la méthode du spectre de réponse

2.4.1. Présentation de l'ouvrage

Il s'agit d'étudier un bâtiment (R + 1) à deux niveaux contreventés par des portiques en béton armé. Les planchers sont considérés infiniment rigides, et les portiques supposés encastrés en pied (sol + fondation rigides). Le bâtiment est soumis à un séisme défini par son spectre de réponse. Il s'agit d'étudier la réponse pour chaque mode propre séparément.



2.4.2. Coefficients sismiques

Les caractéristiques sismiques du bâtiment sont :

- Groupe d'usage 2 (bâtiment à usage d'habitation)
- Catégorie S2 (bâtiment implanté sur un site ferme)

- Zone III (zone de forte sismicité)
- Coefficient de comportement : $R = 3,5$
- Module d'Young : $E = 3,2 \times 10^7$ MPa
- Coefficient d'accélération de zone : $A = 0,25$
- Coefficient d'amortissement : $\xi = 7 \%$
- Facteur de correction d'amortissement (pour $\xi \neq 5 \%$) : $\eta = \sqrt{\frac{7}{2+\xi}} \geq 0,7 \rightarrow \eta = \sqrt{\frac{7}{2+7}} = 0,88$
- Coefficient de pondération des charges d'exploitation : $\beta = 0,2$
- Facteur de qualité : $Q = 1,1$
- Périodes caractéristiques associées à la catégorie du site : $T_1 = 0,15$ sec et $T_2 = 0,40$ sec
- $g = 9,81$ m/s²

2.4.3. Spectre de réponse

L'action sismique est représentée par le spectre de calcul suivant :

$$S_a(T)/g = \begin{cases} 1,25 A \left[1 + \frac{T}{T_1} \left(2,5 \eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right] & \rightarrow 0 \leq T \leq T_1 \\ 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{Q}{R} \right) & \rightarrow T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{Q}{R} \right) \left(\frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & \rightarrow T_2 \leq T \leq 3,0 \text{ sec} \\ 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{T} \right)^{5/3} \left(\frac{Q}{R} \right) & \rightarrow T > 3,0 \text{ sec} \end{cases}$$

2.4.4. Travail demandé

1) Il s'agit de :

- Modéliser la structure du bâtiment.
- Déterminer les matrices de masse et de rigidité.
- Calculer les fréquences de vibration sans amortissement de cette structure.

2) En supposant que la structure demeure dans le domaine linéaire pendant le séisme avec 7 % d'amortissement critique pour chaque mode :

- Déterminez les accélérations spectrales pour chaque mode de vibration.
- Calculer les déplacements relatifs maximaux des étages pour chaque mode.
- Évaluez l'énergie potentielle emmagasinée dans la structure lors du mouvement.
- Calculer le cisaillement maximum à la base de la structure pour chaque mode vibratoire.
- En utilisant la règle de superposition quadratique, estimer le cisaillement maximum probable à la base de la structure.

2.4.5. Réponse

1. Modélisation de la structure du bâtiment

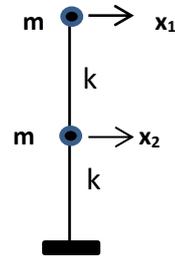
On admet les hypothèses suivantes :

- Les masses du portique concentrées au niveau des planchers.

- Les déplacements verticaux négligeables par rapports aux déplacements horizontaux.
- Les poteaux conservent leurs rigidités latérales mais ne possèdent aucune masse.

Avec ces hypothèses, le modèle est donc composé de deux ressorts en série dont la raideur k (raideurs des 2 poteaux encastrés en pieds) est égale à :

$$k = 2 \times \frac{12 EI}{h^3} \rightarrow \begin{cases} I = (0,3 \times 0,3^3) / 12 = 6,75 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ E = 3,2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \\ h = 2,70 \text{ m} \end{cases}$$



Ce qui donne :

$$k = \frac{24 \times 3,2 \times 10^7 \times 6,75 \times 10^{-4}}{2,7^3} = 26\,337,45 \text{ kN/m}$$

$$k = 26\,337,45 \text{ kN/m}$$

2. Evaluation des modes propres de vibration

2.1. Evaluation des pulsations

Pour évaluer les pulsations du modèle, il faut d'abord déterminer les matrices des masses et de rigidité. Les déplacements x_1 et x_2 sont regroupés sous forme de vecteur : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Les matrices de rigidité et de masse ont pour valeur :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_2 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \quad [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Les pulsations des deux modes propres sont données par l'équation :

$$|K - M \omega^2| = 0$$

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow [(k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2] = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré en ω^2 dont les racines sont :

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \approx 0,382 \frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \approx 2,618 \frac{k}{m}$$

Les pulsations des deux modes de vibration sont :

$$\omega_1^2 = 0,382 \times \frac{26\,337,45}{100} = 100,61 \rightarrow \omega_1 = 10,0 \text{ rad/s} \rightarrow T_1 = 0,63 \text{ s} \rightarrow f_1 = \frac{1}{T_1} = 1,59 \text{ Hz}$$

$$\omega_2^2 = 2,618 \times \frac{26\,337,45}{100} = 689,51 \rightarrow \omega_2 = 26,3 \text{ rad/s} \rightarrow T_2 = 0,24 \text{ s} \rightarrow f_2 = \frac{1}{T_2} = 4,17 \text{ Hz}$$

2.2. Calcul des vecteurs propres

Les vecteurs propres s'obtiennent par l'expression :

$$(K - M\omega_j^2) D_j = 0$$

- **Premier mode de vibration**

Pour le premier mode de vibration, la relation précédente à pour valeur :

$$(K - M\omega_1^2) = \begin{bmatrix} k - m \times 0,382 \frac{k}{m} & -k \\ -k & 2k - m \times 0,382 \frac{k}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k - 0,382 k & -k \\ -k & 2k - 0,382 k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0,618 & -1 \\ -1 & 1,618 \end{bmatrix}$$

Pour chaque mode, le vecteur déplacement D peut être mis sous la forme : $D = \begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix}$

Le vecteur propre D_1 correspondant au premier mode de vibration vaut :

$$\begin{bmatrix} 0,618 & -1 \\ -1 & 1,618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0,618 - u = 0 \\ -1 + 1,618 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$u = 0,618 \rightarrow D_1 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,618 \end{bmatrix}$$

Et le vecteur Φ_1 (vecteur proportionnel au vecteur modal D_1) vaut :

$$\Phi_1 = a_1 D_1 \rightarrow a_1 = \frac{D_1^T M \Delta}{D_1^T M D_1} \rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\Delta = \text{vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1})$$

Ce qui donne :

$$a_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0,618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0,618 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,618 \end{bmatrix}} = \frac{m(1+0,618)}{m(1+0,618^2)} = \frac{1+0,618}{1+0,618^2} = 1,17$$

$$a_1 = 1,17$$

$$\Phi_1 = a_1 D_1 = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,170 \\ 0,723 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1,170 \\ 0,723 \end{bmatrix}$$

- **Deuxième mode de vibration**

La matrice $(K - M\omega_2^2)$ a comme valeur :

$$(K - M\omega_2^2) = \begin{bmatrix} k - m \times 2,618 \frac{k}{m} & -k \\ -k & 2k - m \times 2,618 \frac{k}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k - 2,618 k & -k \\ -k & 2k - 2,618 k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1,618 & -1 \\ -1 & -0,618 \end{bmatrix}$$

Le vecteur propre D_2 correspondant au deuxième mode de vibration vaut :

$$\begin{bmatrix} -1,618 & -1 \\ -1 & -0,618 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -1,618 - u = 0 \\ -1 - 0,618 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

$$u = -1,618 \rightarrow D_2 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{bmatrix}$$

Le vecteur Φ_2 vaut :

$$a_2 = \frac{[1 \quad -1,618] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad -1,618] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1,618 \end{bmatrix}} = \frac{m(1-1,618)}{m(1+1,618^2)} = \frac{1-1,618}{1+1,618^2} = -0,171$$

$$a_2 = -0,171$$

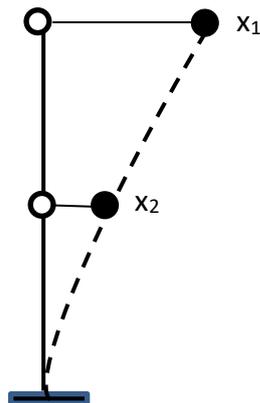
$$\Phi_2 = a_2 D_2 = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,171 \\ 0,277 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} -0,171 \\ 0,277 \end{bmatrix}$$

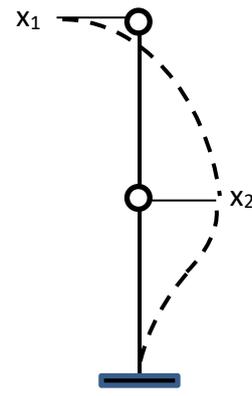
Récapitulatif

Mode de vibration	1	2
Période T (s)	0,63	0,24
Fréquence f (Hz)	1,56	4,17
Vecteur des déplacements $\Phi_j \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	1,170 0,723	-0,171 0,277

2.3. Allure des deux modes de vibration



Premier mode de vibration



Deuxième mode de vibration

3. Calcul des accélérations spectrales

Les accélérations spectrales valent :

- Pour le premier mode :

$$T_1 = 0,63 \text{ s} \rightarrow 0,40 \leq T \leq 3,0 \text{ s} \rightarrow \frac{S_{a,1}}{g} = 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{Q}{R}\right) \left(\frac{T_2}{T}\right)^{2/3}$$

$$\frac{S_{a,1}}{g} = 0,11945 \approx 0,12 \rightarrow S_{a,1} = 0,12 g$$

$$S_{a,1} = 1,18 \text{ m/s}^2$$

- Pour le second mode de vibration :

$$T_2 = 0,24 \text{ s} \rightarrow 0,15 \leq T \leq 0,40 \text{ s} \rightarrow \frac{S_{a,2}}{g} = 2,5 \eta (1,25 A) \left(\frac{Q}{R}\right)$$

$$\frac{S_{a,2}}{g} = 0,1718 \approx 0,172 \text{ s} \rightarrow S_{a,2} = 0,172 g$$

$$S_{a,2} = 1,69 \text{ m/s}^2$$

4. Calcul des déplacements maximaux relatifs des étages

Il s'agit de calculer la réponse maximale (déplacements relatifs maximaux des masses) de chaque degré de liberté i dans chaque mode de vibration j . Elle est donnée par :

$$x_{i,\max}^{(j)} = D_i^{(j)} a_j S_D^{(j)} = \frac{D_i^{(j)} a_j S_a^{(j)}}{\omega_j^2}$$

Où,

S_D : spectre de réponse en déplacement relatif $\rightarrow S_D^{(j)} = \frac{S_a^{(j)}}{\omega_j^2}$

S_a : spectre de réponse en pseudo-accélération

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ 0,618 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1,000 \\ -1,618 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = 1,17$$

$$a_2 = -0,171$$

$$S_{a,1} = 1,18 \text{ m/s}^2$$

$$S_{a,2} = 1,69 \text{ m/s}^2$$

$$\omega_1^2 = 100,61$$

$$\omega_2^2 = 689,51$$

- Premier mode

$$x_{1,\max}^{(1)} = \frac{(1,000)(1,17)(1,18)}{100,61} = 13,65 \text{ mm}$$

$$x_{1,\max}^{(1)} = \mathbf{13,65 \text{ mm}}$$

$$x_{2,\max}^{(1)} = \frac{(0,618)(1,17)(1,18)}{100,61} = 8,48 \text{ mm}$$

$$x_{2,\max}^{(1)} = \mathbf{8,23 \text{ mm}}$$

- Deuxième mode

$$x_{1,\max}^{(2)} = \frac{(1,000)(-0,171)(1,69)}{689,51} = -0,41 \text{ mm}$$

$$x_{1,\max}^{(2)} = \mathbf{-0,41 \text{ mm}}$$

$$x_{2,\max}^{(2)} = \frac{(-1,618)(-0,171)(1,69)}{689,51} = 0,678 \text{ mm} \approx 0,68 \text{ mm}$$

$$x_{2,\max}^{(2)} = \mathbf{0,68 \text{ mm}}$$

Les déplacements relatifs maximaux figurent dans le tableau ci-dessous.

Déplacements horizontaux (mm)		
Mode	1	2
x_1	13,65	-0,41
x_2	8,48	0,68

5. Energie potentielle emmagasinée dans la structure lors du mouvement

Pour un mode j , l'énergie emmagasinée est donnée par l'expression :

$$E^{(j)} = \frac{1}{2} [X^{(j)}]^T [K] [X^{(j)}]$$

Où,

$[X^{(j)}]^T$: vecteur transposé du vecteur $[X^{(j)}]$ des déplacements relatifs maximum suivant le mode j .

- Mode 1

Sachant que :

$$k = 26\,337,45 \text{ kN/m}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

Il vient :

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 26\,337,45 \times 10^{-6} [13,65 \quad 8,48] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13,72 \\ 8,48 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{26\,337,45 \times 10^{-6}}{2} [5,17 \quad 3,31] \begin{bmatrix} 13,65 \\ 8,48 \end{bmatrix} = \frac{26\,337,45 \times 10^{-6}}{2} \times 98,6393 = 1,2989538 \approx 1,30$$

$$E_1 = 1,30$$

- Mode 2

$$E_2 = \frac{1}{2} \times 26\,337,45 \times 10^{-6} [-0,41 \quad 0,68] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,41 \\ 0,68 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \frac{26\,337,45 \times 10^{-6}}{2} [-1,09 \quad 1,77] \begin{bmatrix} -0,41 \\ 0,68 \end{bmatrix} = \frac{26\,337,45 \times 10^{-6}}{2} \times 1,6505 = 0,02173 \approx 2,17 \times 10^{-2}$$

$$E_2 = 2,17 \times 10^{-2}$$

Les énergies ont pour valeur relative :

- Mode 1 : $E_1 = 1,30$
- Mode 2 : $E_2 = 2,17 \times 10^{-2}$

→ Mode 1 prépondérant

6. Forces maximales pour chaque mode

Les forces statiques équivalentes pour chaque mode peuvent être déterminées en appliquant aux masses les accélérations spectrales (ou pseudo accélération) calculées pour chaque mode de vibration. Ces accélérations sont estimées à partir de l'expression :

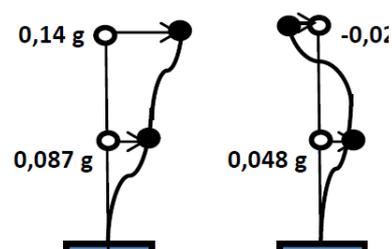
$$[F_j] = [S_a] [\Phi]$$

Où,

$[F_j]$: forces statiques équivalentes

$[S_a]$: spectre de réponse en pseudo-accélération

$[\Phi]$: vecteur proportionnel au vecteur déplacement D



Les accélérations spectrales sont :

- Pour le premier mode de vibration

$$0,12 \text{ g} \begin{bmatrix} 1,170 \\ 0,723 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,14 \text{ g} \\ 0,087 \text{ g} \end{bmatrix}$$

- Pour le second mode de vibration

$$0,172 \text{ g} \begin{bmatrix} -0,17 \\ 0,277 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,029 \text{ g} \\ 0,048 \text{ g} \end{bmatrix}$$

Les forces statiques engendrées sont :

- Pour le mode 1

$$F_1^1 = 0,14 \text{ g} \times 100 = 14 \text{ g} \approx 140 \text{ kN}$$

$$F_2^1 = 0,087 \text{ g} \times 100 = 8,7 \text{ g} \approx 87 \text{ kN}$$

- Pour le mode 2

$$F_1^2 = -0,029 \text{ g} \times 100 = -2,9 \text{ g} = -29 \text{ kN}$$

$$F_2^2 = 0,048 \text{ g} \times 100 = 4,8 \text{ g} = 48 \text{ kN}$$

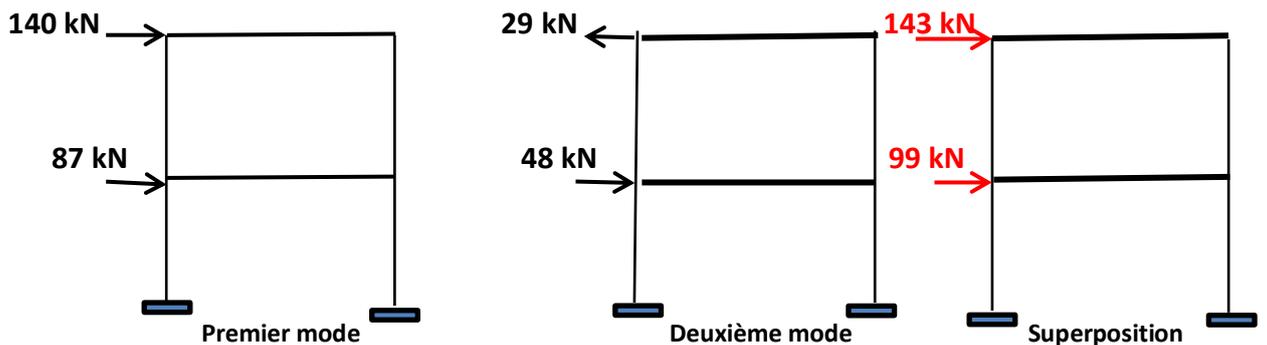
Les forces maximales à chaque niveau du bâtiment sont déterminées en utilisant la règle de superposition quadratique SRSS (racine carrée de la somme des carrés) :

$$F_{j,\max,\text{tot}} = \sqrt{\sum_{n=1}^n |F_{jn,\max}|^2}$$

Ce qui donne :

$$F_{1,\max,\text{tot}} = \sqrt{140^2 + 29^2} = 142,972 \approx 143 \text{ kN}$$

$$F_{2,\max,\text{tot}} = \sqrt{87^2 + 48^2} = 99,363 \approx 99 \text{ kN}$$

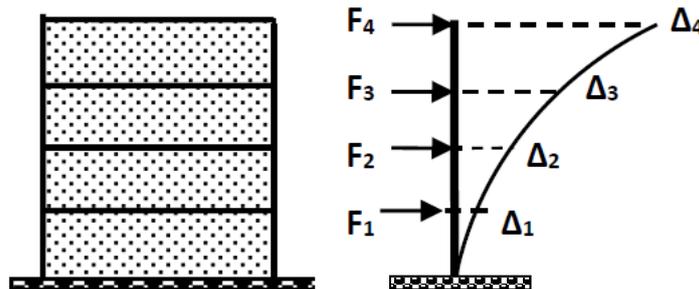


2.5. Calcul de la période fondamentale par les méthodes approchées d'un bâtiment (R + 3) contreventé par des refends

2.5.1. Présentation de l'ouvrage

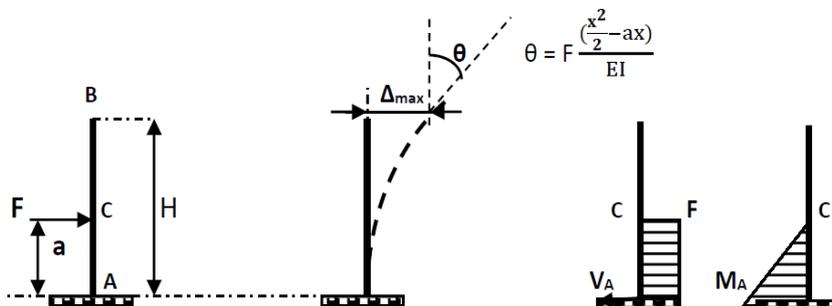
Il s'agit d'évaluer la période d'un bâtiment contreventé par voiles, comportant 4 planchers (R + 3) de 1,70 MN. Ces planchers sont espacés de 3 m.

L'inertie des voiles est constante et vaut $1,45 \text{ m}^4$. Le module d'Young vaut $32\,000 \text{ MPa}$.



2.5.2. Réponse

1. Rappel : Déformations dans une console soumise à une force F



Équations en fonction de x	
A à C	C à B
$V = F$	$V = 0$
$M = F(x - a)$	$M = 0$
$\theta_e = \frac{F(\frac{x^2}{2} - ax)}{EI}$	$\theta = \theta_C$
$\Delta = \frac{F(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2})}{EI}$	$\Delta = \Delta_C + (x - a)\theta_C$

$$\theta_B = \theta_C = -Fa^2/(2EI) \quad V_A = F \quad M = M_A = -Fa$$

$$\Delta_C = -Fa^3/(3EI)$$

$$\Delta_{\max} = \Delta_B = -Fa^2(3H - a)/(6EI)$$

1. Calcul de la période fondamentale en utilisant la formule de Rayleigh ($T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum F_i \Delta_i^2}{g \sum F_i \Delta_i}}$)

1.1. Calcul des déformations des différentes masses

- Au niveau 1

$$\Delta_1 = F_1 H^3 / 192EI + 5F_2 H^3 / 384EI + 8F_3 H^3 / 384EI + 11F_4 H^3 / 384EI$$

$$\Delta_1 = (2F_1 + 5F_2 + 8F_3 + 11F_4) H^3 / 384EI$$

$$= F (2 + 5 + 8 + 11) H^3 / 384EI$$

$$= 26 FH^3 / 384EI = (26 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45)$$

$$= 0,0042866 \text{ m}$$

$$\Delta_1 = 0,0042866 \text{ m}$$

- **Au niveau 2**

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= (5F_1 + 16F_2 + 28F_3 + 40F_4) H^3/384EI \\ &= F (5 + 16 + 28 + 40) H^3/384EI \\ &= 89 FH^3/384EI = (89 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45) \\ &= 0,0146735 \text{ m}\end{aligned}$$

$\Delta_2 = 0,0146735 \text{ m}$

- **Au niveau 3**

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= (8F_1 + 28F_2 + 54F_3 + 81F_4) H^3/384EI \\ &= F (8 + 28 + 54 + 81) H^3/384EI \\ &= 171 FH^3/384EI = (171 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45) \\ &= 0,0281929 \text{ m}\end{aligned}$$

$\Delta_3 = 0,0281929 \text{ m}$

- **Au niveau 4**

$$\begin{aligned}\Delta_4 &= (11F_1 + 40F_2 + 81F_3 + 128F_4) H^3/384EI \\ &= F (11 + 40 + 81 + 128) H^3/384EI \\ &= 260 FH^3/384EI = (260 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45) \\ &= 0,0428664 \text{ m}\end{aligned}$$

$\Delta_4 = 0,0428664 \text{ m}$

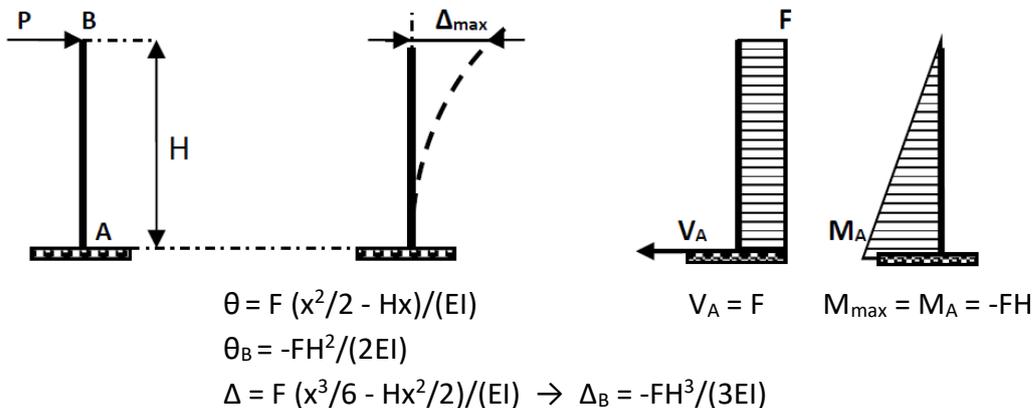
1.2. Période fondamentale du bâtiment

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum F_i \Delta_i^2}{g \sum F_i x_i}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,7(0,0042866^2 + 0,0146735^2 + 0,0281929^2 + 0,0428664^2)}{10 \times 1,7(0,0042866 + 0,0146735 + 0,0281929 + 0,0428664)}} \quad (g = 10 \text{ m/s}^2)$$

$T = 0,32879 \text{ sec}$

2. Version simplifiée de la formule de Rayleigh : $T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum F_i \Delta_i^2}{g \Delta_n}}$

Mêmes données que précédemment à l'exception de F_1, F_2 et F_3 pris égaux à zéro.



Sachant que $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ et $F_4 = 1,7$ MN, les déformations des masses sont :

$$- \Delta_1 = 11F_4H^3/384EI$$

$$\Delta_1 = (11 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45)$$

$$\Delta_1 = 0,0018136 \text{ m}$$

$$- \Delta_2 = 40P_4H^3/384EI$$

$$\Delta_2 = (40 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45)$$

$$\Delta_2 = 0,0065948 \text{ m}$$

$$- \Delta_3 = 81P_4H^3/384EI$$

$$\Delta_3 = (81 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45)$$

$$\Delta_3 = 0,0133545 \text{ m}$$

$$- \Delta_4 = 128P_4H^3/384EI$$

$$\Delta_4 = (128 \times 1,7 \times 12^3) / (384 \times 32000 \times 1,45)$$

$$\Delta_4 = 0,0211034 \text{ m}$$

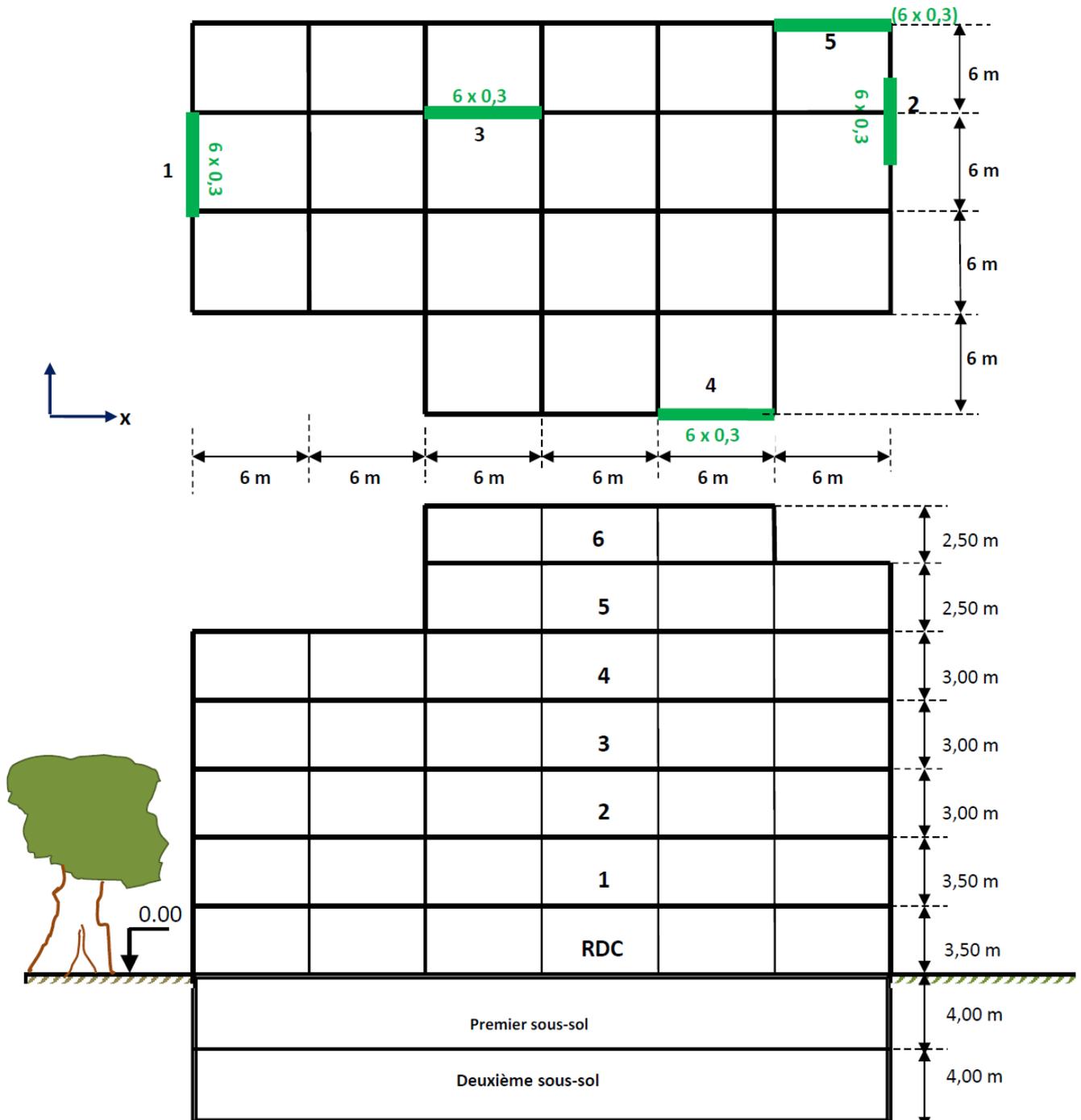
La période de vibration est donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum F_i \Delta_i^2}{g \Delta_n}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,7(0,0018136^2 + 0,0065948^2 + 0,0133545^2 + 0,0211034^2)}{10 \times 0,0211034}}$$

$$T = \mathbf{0,461764 \text{ sec}}$$

2.6. Recherche des fréquences propres d'un bâtiment contreventé par des refends

2.6.1. Présentation de l'ouvrage



2.6.2. Travail demandé

Il s'agit de :

1) Déterminer les périodes propres de ce bâtiment en utilisant les approches suivantes :

- La formule empirique (fonction du nombre de niveaux n).
- La formule semi empirique (fonction de la hauteur du bâtiment et de la nature du système structural).
- Le quotient de Rayleigh en exprimant les déformations des niveaux à partir de la matrice de flexibilité $|\bar{f}|$
- La version simplifiée de la formule de Rayleigh.

2) Commenter les résultats obtenus.

3) Quelle est la valeur à retenir pour un prédimensionnement ?

4) Comment varie la période propre du bâtiment si le nombre d'étages venait à doubler ?

2.6.3. Réponse

2.6.3.1. Calculs préliminaires

Les deux sous-sols constituent un soubassement rigide, par conséquent, le bâtiment peut être considéré comme encasté à sa base.

1. inertie des refends

Refends transversaux

$$(1) \quad 0,3 \times 6,0 \rightarrow I_{x,1} = 5,4 \text{ m}^4$$

$$(2) \quad 0,3 \times 6,0 \rightarrow I_{x,2} = 5,4 \text{ m}^4$$

$$\Sigma I_x = 10,8 \text{ m}^4$$

Refends longitudinaux

$$(3) \quad 0,3 \times 6,0 \rightarrow I_{y,1} = 5,4 \text{ m}^4$$

$$(4) \quad 0,3 \times 6,0 \rightarrow I_{y,1} = 5,4 \text{ m}^4$$

$$(5) \quad 0,3 \times 6,0 \rightarrow I_{y,1} = 5,4 \text{ m}^4$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) \\ (4) \\ (5) \end{array} \right\} \rightarrow \Sigma I_y = 16,2 \text{ m}^4$$

2. Module de déformation longitudinale du béton

Il est pris égal à :

$$E = 24 \times 10^3 \text{ MN/m}^2$$

Remarque : Modélisation

La modélisation d'une structure pour une étude dynamique consiste à établir un modèle de calcul qui peut reproduire au mieux le comportement dynamique réel de la structure : l'expérience et le jugement du calculateur sont ici des facteurs indispensables.

Une bonne modélisation (même pour les structures simples) exige un ensemble de réflexions et de choix sur les points suivants :

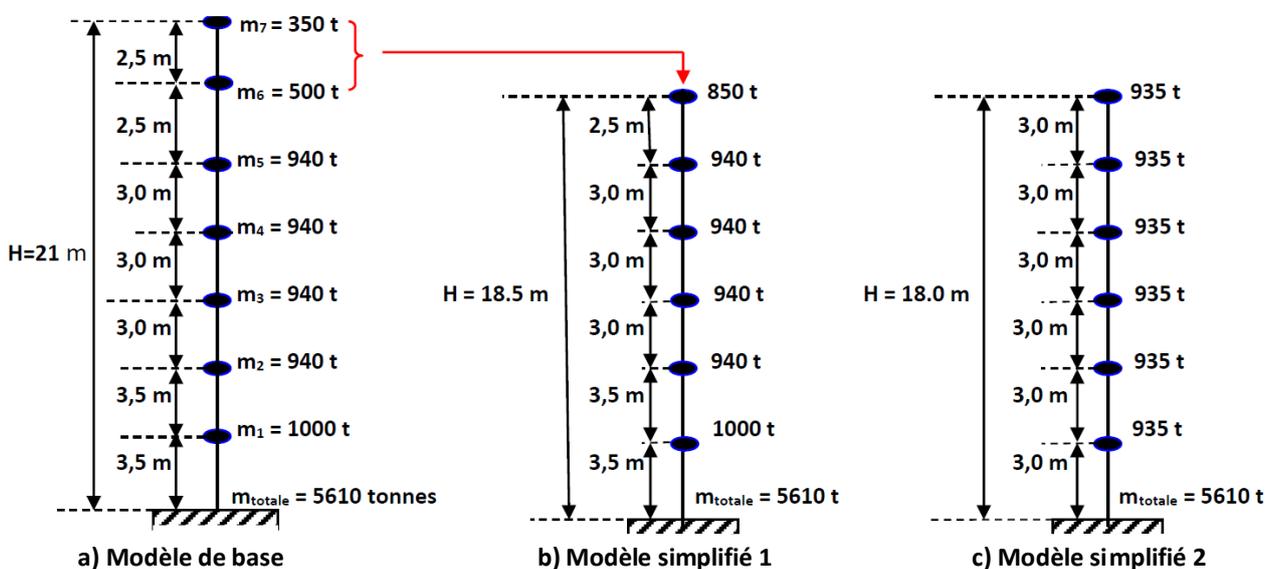
- 1) Nombre de dimensions à considérer pour le modèle : pour les structures symétriques, le recours à un modèle tridimensionnel est souvent inutile car la réponse à une excitation est essentiellement plane.
- 2) Degré de raffinement du modèle : c'est selon la demande (connaissance détaillée des sollicitations dans les différents éléments ou bien simplement une réponse globale de la structure qui peut fournir des données en vue d'analyses locales plus détaillées dans le cas de structures complexes.
- 3) Représentation des éléments non structuraux (remplissage de maçonnerie des structures),

3. Répartition des masses par niveau

Cote (m)	Niveau	Masse (t)
0	0	0
3,5	1	1000
6,5	2	940
9,5	3	940
12,5	4	940
15,5	5	940
18,5	6	500
21,0	7	350

4. Modélisation

Pour déterminer les fréquences propres du bâtiment, on peut utiliser les modélisations suivantes



À propos du modèle simplifié 1, la masse de la terrasse est rajouté au niveau 6. Quant au modèle simplifié 2, les hauteurs d'étages sont supposées constantes et les masses sont réparties également entre les différents planchers.

2.6.3.2. Période fondamentale du bâtiment

Les périodes propres du bâtiment sont déterminées à partir des modèles simplifiés, autrement dit en considérant 6 niveaux au lieu de 7.

1. Formule empirique

Fréquence propre : $f = \frac{10}{n} = \frac{10}{6} = 1,67 \text{ Hz}$

f = 1,67 Hz

Période fondamentale : $T = \frac{1}{f} = \frac{6}{10} = 0,6 \text{ s}$

T = 0,6 s

2. Formule semi empirique

Période fondamentale :

$$T = C_t H^{3/4} \begin{cases} C_t = 0,05 \rightarrow \text{contreventement par refends} \\ H = 3 \times 6 = 18,0 \text{ m} \end{cases}$$

$T = 0,05 \times 18^{0,75} = 0,4369 \approx 0,44 \text{ sec}$

T = 0,44 sec

Fréquence propre :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,44} = 2,27 \text{ sec}$$

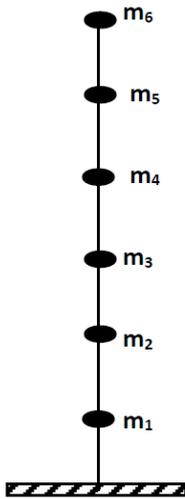
f = 2,27 sec

3. Quotient de Rayleigh

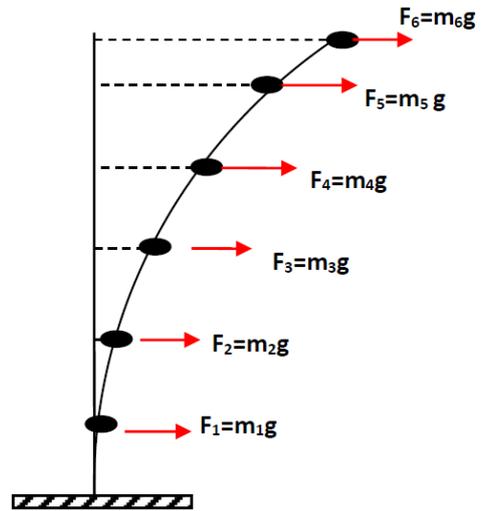
Rappel

Rayleigh (1945) a développé une méthode d'analyse des systèmes vibratoires en se basant sur la conservation d'énergie. Cette méthode permet le calcul approché de la période du premier mode de vibration d'un oscillateur multiple à n degrés de liberté caractérisé par une matrice de rigidité K et une matrice de masse M . Pour les structures courantes, la déformée du premier mode a une allure comparable à celle obtenue en soumettant toutes les masses à la même accélération g , c'est-à-dire en leur imposant une force statique horizontale égale à leur poids propre (voir figure qui suit).

Les poids F_j des différents niveaux sont supposés concentrés au niveau des planchers. Les déplacements $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_j, \dots, \Delta_n$ correspondant à ces forces représentent une approximation de la déformée modale. Cette méthode donne une estimation de la période avec une précision de 1 à 8 % par défaut.



Modèle de console à 6 masses concentrées



Allure de la déformée du premier mode de vibration

Chaque masse m_j est donc soumise à une force horizontale statique F_j ($F_i = m_j g$). Les déplacements $\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots, \Delta_n$ correspondant à ces forces représentent une approximation de la déformée modale.

La pulsation ω s'exprime par la relation suivante :

$$\omega^2 = \frac{\sum_{j=1}^n F_j \Delta_j}{\sum_{j=1}^n m_j \Delta_j^2} = g \frac{\sum_{j=1}^n F_j \Delta_j}{\sum_{j=1}^n F_j \Delta_j^2}$$

Connaissant ω , la période est évaluée à partir de l'expression :

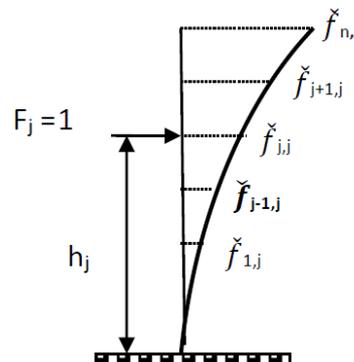
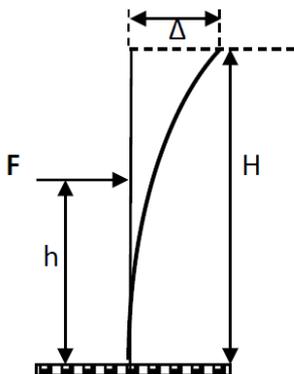
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n F_j \Delta_j^2}{g \sum_{j=1}^n F_j \Delta_j}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n m_j \Delta_j^2}{\sum_{j=1}^n F_j \Delta_j}}$$

Les déplacements des différents niveaux Δ_j du bâtiment peuvent être calculés à partir de la matrice de flexibilité $|\check{f}|$ dont les éléments sont déterminés comme ci-dessous.

Soit :

- $|\check{f}|$ la déformation d'une console encastree à sa base et soumise à une force concentrée F (voir l'application 2.6) :

$$\Delta = \frac{F h^3}{6EI} (3H - h)$$



- $\check{f}_{i,j}$ les éléments de la matrice de flexibilité $|\check{f}|$ déterminés à partir du déplacement Δ :

$$\check{f}_{i,j} = \frac{h_j^2}{6EI} (3h_i - h_j) \quad i \geq j$$

Si tous les niveaux ont même hauteur h , cette dernière expression devient :

$$\check{f}_{i,j} = \frac{h^3}{6EI} j^2 (3i - j) \quad i \geq j$$

Pour le bâtiment concerné par cette analyse, la matrice de flexibilité est :

$$|\check{f}| = \frac{h^3}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 & 64 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 & 135 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 & 224 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 & 325 \\ 17 & 64 & 135 & 224 & 325 & 432 \end{pmatrix}$$

Le calcul des déformations à partir de la matrice de flexibilité se fait en considérant une console encastrée à sa base et soumise à des forces ($F_j = jF$) réparties linéairement aux différents niveaux, tel que :

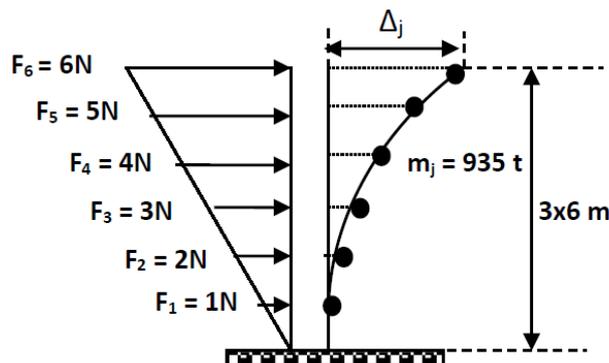
$$\Delta = \check{f} F$$

Où,

\check{f} : matrice de flexibilité

Δ : vecteur des déplacements des niveaux

F : vecteur des forces fictives



$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{pmatrix} = \frac{h^3}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 & 64 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 & 135 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 & 224 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 & 325 \\ 17 & 64 & 135 & 224 & 325 & 432 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{h^3}{6EI} \begin{pmatrix} 252 \\ 925 \\ 1900 \\ 3070 \\ 4346 \\ 5663 \end{pmatrix}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^6 m_j \Delta_j^2}{\sum_{j=1}^6 F_j \Delta_j}} \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^6 F_j \Delta_j}{\sum_{j=1}^6 m_j \Delta_j^2}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 F_j \Delta_j &= [(252 \times 1) + (925 \times 2) + (1900 \times 3) + (3070 \times 4) + (4346 \times 5) + (5663 \times 6)] \frac{h^3}{6 EI} \\ &= 75\,790 \frac{h^3}{6 EI} \text{ (Nm)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^6 m_j \Delta_j^2 &= [935 \times 10^3] \left[\frac{h^3}{6 EI}\right]^2 + [252^2 + 925^2 + 1900^2 + 3070^2 + 4346^2 + 5663^2] \\ &= [935 \times 10^3] \left[\frac{h^3}{6 EI}\right]^2 [64\,911\,314] = 6,069 \times 10^{13} \left[\frac{h^3}{6 EI}\right]^2 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

Sachant que :

I_y : somme des moments d'inertie des refends longitudinaux //x = $\sum I_y = 16,2 \text{ m}^4$

I_x : somme des moments d'inertie des refends transversaux //y = $\sum I_x = 10,8 \text{ m}^4$

E : module de déformation longitudinale du béton = $24 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

m_j : masse d'un niveau = masse totale/nombre de niveaux = $5610/6 = 935 \text{ t}$

h = hauteur d'étage = 3,0 m

On obtient :

1) Etat non fissuré (100 % de EI)

$$\text{Suivant x : } \frac{h^3}{6 E I_y} = \frac{3^3}{6 \times 24 \times 10^9 \times 16,2} = 1,157 \times 10^{-11} \text{ (N/m)}$$

$$\text{Suivant y : } \frac{h^3}{6 E I_x} = \frac{3^3}{6 \times 24 \times 10^9 \times 10,8} = 1,736 \times 10^{-11} \text{ (N/m)}$$

La fréquence propre est :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^6 F_j \Delta_j}{\sum_{j=1}^6 m_j \Delta_j^2}} = \begin{cases} \text{Suivant x} \rightarrow f_x = 1,65 \text{ Hz} \rightarrow T_x = 0,60 \text{ s} \\ \text{Suivant y} \rightarrow f_y = 1,35 \text{ Hz} \rightarrow T_y = 0,74 \text{ s} \end{cases}$$

2) Etat fissuré

En supposant qu'on ait une chute de rigidité de 30 %, il vient :

$$\text{- Suivant x : } \frac{h^3}{6 E I_y} = \frac{3^3}{6 \times 24 \times 10^9 \times 16,2 \times 0,30} = 3,858 \times 10^{-11} \text{ (N/m)}$$

$$\text{- Suivant y : } \frac{h^3}{6 E I_x} = \frac{3^3}{6 \times 24 \times 10^9 \times 10,8 \times 0,30} = 5,787 \times 10^{-11} \text{ (N/m)}$$

La fréquence à l'état fissuré est :

$$\text{- Suivant x} \rightarrow f_x = 0,905 \text{ Hz} \rightarrow T_x = 1,105 \text{ s}$$

$$\text{- Suivant y} \rightarrow f_y = 0,740 \text{ Hz} \rightarrow T_y = 1,35 \text{ s}$$

4. Récapitulatif

Formule empirique : $T = 0,6 \text{ s}$

Formule semi empirique : $T = 0,44 \text{ sec}$

Quotient de Rayleigh :

- Etat non fissuré

$$T_X = 0,60 \text{ s}$$

$$T_Y = 0,74 \text{ s}$$

- Etat fissuré

$$T_X = 1,105 \text{ s}$$

$$T_Y = 1,35 \text{ s}$$

2.6.3.3. Commentaires

1. Formule empirique

Elle ne donne qu'un ordre de grandeur de la période fondamentale. Pour cette raison, elle ne doit être utilisée qu'à titre indicatif

2. Formule semi empirique fonction de nature du contreventement

Elle donne une faible période. Par conséquent, elle est à considérer comme limite inférieure.

3. Quotient de Rayleigh

Il génère les périodes les plus élevées. Cela peut s'expliquer par, d'une part, la prise en compte des caractéristiques spécifiques des éléments de contreventement de l'ouvrage, et d'autre part, par la non considération de l'effet des éléments non porteurs (maçonnerie rigide ou cloisons légères).

Remarque

La période obtenue à partir du quotient de Rayleigh est valable lorsque la répartition des forces fictives aux niveaux des étages correspond au premier mode de vibration. Pour les autres modes, elle donne des valeurs inférieures. Par ailleurs, même avec une répartition assez sommaire des forces fictives, le quotient de Rayleigh conduit à une bonne estimation de la période fondamentale. En effet, un écart de 10 % dans la répartition des forces fictives entraîne un écart de 1 % pour la période (précision au carré). Par conséquent, une répartition linéaire des forces fictives des niveaux ($F_j = jF$) suivant la hauteur du bâtiment conduit à une bonne estimation de la période fondamentale.

2.6.3.4. Valeurs à retenir pour un pré-dimensionnement

L'estimation de la période fondamentale doit tenir compte des éléments non porteurs et de la chute de rigidité provoquée par la fissuration du béton.

Lors d'un prédimensionnement, la valeur de la période doit être choisie avec une grande précaution. Autrement dit, la valeur retenue dépend de sa position sur le spectre de dimensionnement. Une sous-évaluation de la période est recommandée avant le plateau, alors qu'une surévaluation est indiquée après le plateau.

En ce qui concerne cette application, on peut utiliser les valeurs de période obtenues pour l'état non fissuré pour le prédimensionnement.

2.6.3.5. Variation de la période du bâtiment en fonction du nombre d'étages

Pour estimer la variation de la période en fonction du nombre d'étages, on peut utiliser la formule empirique précédente. Ce qui donne si le nombre d'étages venait à doubler, on obtient :

$$T = \frac{n}{10} = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ s}$$

T = 1,2 s → Période propre multipliée par deux (fréquence divisée par deux)