MATHEMATIQUES DE L'INGENIEUR

Ce cours, je l'ai préparé il y a de ça quelques années en m'aidant d'un document qu'un étudiant m'a remis. Si je n'ai pas donné le nom de l'auteur du document, c'est parce que je ne le connais pas. S'il se reconnait, je serais très heureuse de lui rendre son dû.

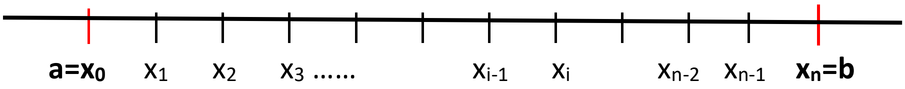
Nadjia MIHOUBI BAOUCHE

« Somme de Riemann ou somme intégrale »

1. Définition

Soit une fonction f continue sur un intervalle [a, b].

a) En divisant l'intervalle [a, b] en *n* sous-intervalles plus petits, on obtient ainsi une subdivision de l'intervalle [a, b].



La longueur de chaque sous-intervalle est notée Δx_i. Ainsi, on a :

$\Delta x_1 = x_1 - x_0$

$\Delta x_2 = x_2 - x_1$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

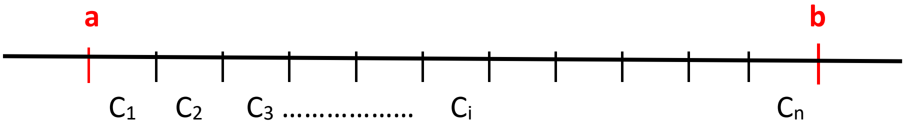
$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

b) Dans chaque sous-intervalle, on choisit un représentant (un point) que l'on désigne par C_i.

$C_1 \in (x_0, x_1)$

$C_2 \in (x_1, x_2)$

$C_n \in (x_{n-1}, x_n)$



c) À partir des sous-intervalles et de leurs représentants, on effectue la somme suivante :

$f(C_1)\,\Delta x_1 + f(C_2)\,\Delta x_2 + \ldots\ldots. + f(C_n)\,\Delta x_n$

Cette somme peut s'écrire :

$\sum_{i=1}^{n} f\,(Ci)\,\Delta x_i$

La somme obtenue est appelée « somme intégrale » ou « somme de Riemann » pour la fonction *f* sur l'intervalle [a, b].

2. Exercices sur la somme intégrale ou somme de Riemann

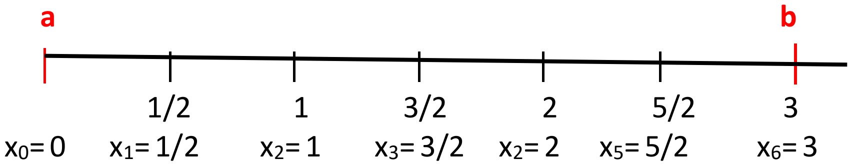
a) Exercice 1

Calculer la somme intégrale de la fonction $f(x) = 1 - x^2$ sur l'intervalle [0, 3] en considérant 6 sous-intervalles égaux et en prenant le point du milieu comme représentant de chaque sous-intervalle.

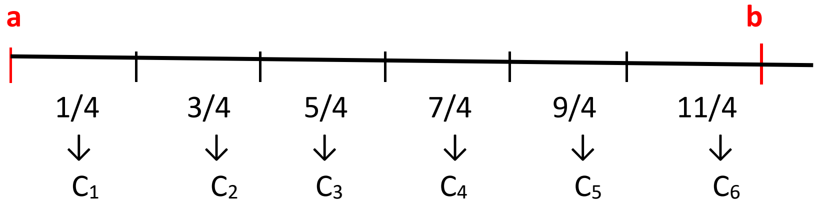
Réponse

On divise l'intervalle [0, 3] en six sous-intervalles égaux de longueur :

$\Delta x_i = 1/2$ [i = 1, 2, 3, 4, 5, 6]



Le point milieu de chaque sous-intervalle est choisi comme représentant. On le désigne par C_i.



La somme de Riemann est égale à :

$\sum_{i=1}^{6}$ f (Ci) Δx_i = f (1/4) (1/2) + f (3/4) (1/2) + f (5/4) (1/2)
+ f (7/4) (1/2) + f (9/4) (1/2) + f (11/4) (1/2)

$\sum_{i=1}^{6}$ f (Ci) Δx_i = 15/32 + 7/32 + (-9/32) + (-33/32) + (-65/32) +(-105/32)
= - 190/32
= - 5,9375

$\sum_{i=1}^{6}$ f (Ci) Δx_i = - 5,9375

Ah, la logique mathématique !

b) Exercice 2

Dans cet exercice, on reprend les mêmes données que l'exercice 1, mais on change le représentant. Les questions qui se posent avec ce changement sont :

- Que devient la somme intégrale en choisissant un autre représentant ?
- Le choix du représentant a-t-il une influence sur la valeur obtenue ?

Pour répondre à ces questions, nous allons envisager deux situations :

- Le cas où la valeur inférieure de chaque sous-intervalle est choisie comme représentant.
- Le cas où c'est la valeur supérieure.

Réponse

1. **Valeur inférieure de chaque sous-intervalle**

En prenant la valeur inférieure, on obtient :

$C_1 = 0$, $C_2 = 1/2$, $C_3 = 1$, $C_4 = 3/2$, $C_5 = 2$, $C_6 = 5/2$

La somme intégrale devient dans ce cas :

$\sum_{i=1}^{6}$ f (Ci) Δx_i = f (0) (1/2) + f (1/2) (1/2) + f (1) (1/2) + f (3/2) (1/2) + f (2) (1/2) + f (5/2) (1/2)

$\sum_{i=1}^{6}$ f (Ci) Δx_i = - 3,875

2. **Valeur supérieure de chaque sous-intervalle**

En prenant la valeur supérieure, on obtient :

$C_1 = 1/2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 3/2$, $C_4 = 2$, $C_5 = 5/2$, $C_6 = 3$

La somme intégrale devient :

$\sum_{i=1}^{6}$ f (Ci) Δx_i = f (1/2) (1/2) + f (1) (1/2) + f (3/2) (1/2) + f (2) (1/2) + f (5/2) (1/2) + f (3) (1/2)

$\sum_{i=1}^{6}$ f (Ci) Δx_i = - 8,375

3. Influence du choix du représentant sur le résultat (suite de l'exercice 2)

Est-ce le choix du représentant à une grande influence sur le résultat obtenue ?

La réponse à cette question peut se faire à l'aide d'une étude comparative, c'est-à-dire, on compare les sommes intégrales obtenues pour un nombre croissant de sous-intervalles égaux, et en considérant dans chaque cas trois choix du représentant.

Ces choix sont :

- La valeur inférieure de chaque sous-intervalle,
- la valeur médiane 〃 〃 〃 〃 〃
- la valeur supérieure 〃 〃 〃 〃 〃

Le tableau suivant contient les sommes intégrales obtenues pour un nombre croissant de sous-intervalles égaux et en considérant les trois choix (suite de l'exercice 2 sur les sommes intégrales).

Nombre	Inférieure	Médiane	Supérieure
3	-2	-5,75	-11
6	-3,875	-5,9375	-8,375
12	-5,90625	-5,98775	-7,1563
24	-5,445313	-5,996094	-6,570313
48	-5,720703	-5,999023	-6,283203
96	-5,859863	-5,999756	-6,141113
192	-5,929809	-5,999940	-6,070435
384	-5,96874	-5,999985	-6,035187
768	-5,982430	-5,999996	-6,017586

L'examen de ce tableau aboutit à la conclusion suivante :
Pour un nombre enlevé de sous-intervalles, les sommes intégrales tendent vers **-6** quel que soit le choix du représentant.

En effet, sous certaines conditions, si la longueur des sous-intervalles se rapproche de **0**, les sommes intégrales convergent.

Ah, la logique mathématique !

« Intégrale définie »

1. Définition

Soit une fonction f et l'intervalle [a, b].

Si $\lim_{\max \Delta xi \to 0} \quad \sum_{i=1}^{n} f(Ci)\, \Delta x_i = A \in \mathbf{R}$

Alors, la fonction f est dite « intégrable » sur [a, b] et la quantité A est appelée « l'intégrale définie » de la fonction f sur [a, b]. Elle est notée :

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\, dx = A}$

Où,

∫ : symbole de déformation de la lettre S pour somme.

a, b : bornes d'intégration .

f (x) : intégrante du problème.

dx : petit intervalle sur l'axe des x.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(Ci)\, \Delta x_i$$

En effet, lorsque les sous-intervalles sont égaux, on a :

$\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n}$

Et, si en plus, max Δxi → 0 → $\frac{(b-a)}{n}$ → 0 → n → ∞

La valeur de **A** étant indépendante du représentant choisi, on prend la plupart du temps comme valeur $\mathbf{C}_i$, le point supérieur, inferieur ou milieu des sous-intervalles. Ce choix présente un avantage : il simplifie les calculs.

2. Théorème : condition d'existence

Si f est continue sur [a, b], alors f est intégrable.

3. Exercices

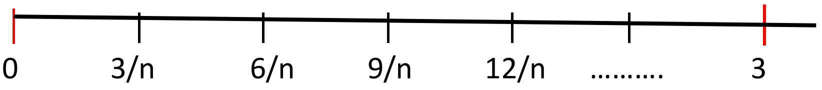
Exercice 1

En utilisant les sommes intégrales, démontrer que $\int_0^3 (1 - x^2)$ dx = - 6

Réponse

Pour ce type d'exercice, il faut d'abord commencer par vérifier si la fonction f(x) = (1-x^2) est continue sur l'intervalle [0, 3]. Cette fonction l'est, elle est donc intégrable. Alors, on subdivise l'intervalle [0, 3] en *n* sous-intervalles égaux, de longueur :

$\Delta x_i = \frac{(b-a)}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$ (1, 2, 3, 4, 5, ...n)



Dans chaque sous-intervalle, on choisit un représentant C_i. Pour chaque représentant, on considère la valeur supérieure de chaque sous-intervalle. Cela donne donc :

C_1 = 3/n, C_2 = 2 (3/n), C_3 = 3 (3/n), C_4 = 4 (3/n), C_i = i (3/n),…….

Le calcul de la somme intégrale aboutit à :

$\sum_{i=1}^{n} f\,(Ci)\ \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}[1-(\frac{3i}{n})^2]\ (\frac{3}{n})$

$= \sum_{i=1}^{n}[\frac{3}{n} - (27i^2/n^3)]$

$= \sum_{i=1}^{n} 3/n - 27/n^3\sum_{i=1}^{n} i^2$

$= 3/n \sum_{i=1}^{n} 1 - 27/n^3\sum_{i=1}^{n} i^2$

$= 3/n\ (n) - 27/n^3[\frac{n\ (n+1)\ (2n+1)}{6}]$

$= 3 - 27/6\ (2 + 3/n + 1/n^2)$

$\sum_{i=1}^{n} f\,(Ci)\ \Delta x_i = - 6 - 27/2n - 9/2n^2$

$\int_0^3 (1 - x^2)\ dx = \lim_{n \to \infty}\ \ \sum_{i=1}^{n} f\,(C_i)\ \Delta x_i$

$= \lim_{n \to \infty}\ \ (- 6 - 27/2n - 9/2n^2)$

$\int_0^3 (1 - x^2)\ dx = - 6$

Exercice 2

Calculer la valeur moyenne μ de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle [0,2].

Réponse

Si f est une fonction continue sur l'intervalle [a, b], alors, la valeur moyenne μ de cette fonction sur ce même intervalle est donnée par :

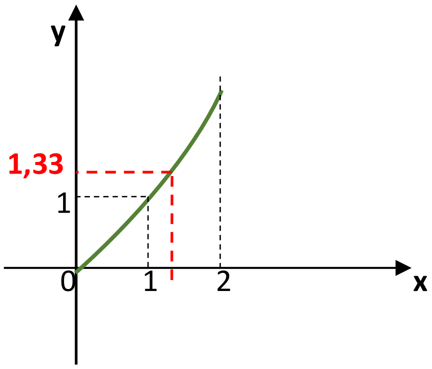
$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$

Pour la fonction $f(x) = x^2$, on a :

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2 dx$

$= 1/2\ (2^3/3 - 0^3/3) = 1,33$

μ = 1,33

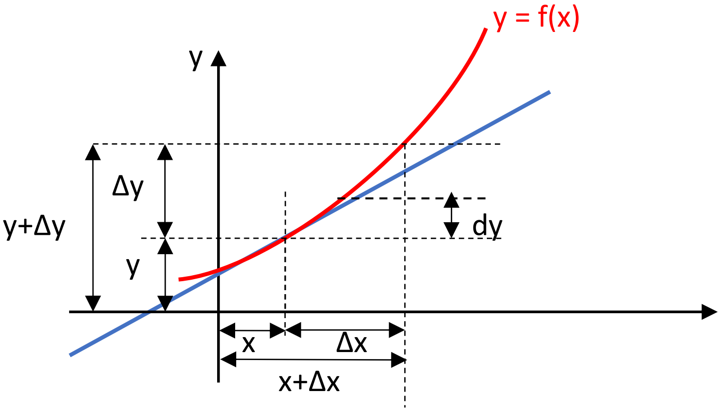


« Primitives »

1. La différentielle

a) Définition

Soit y = f(x) une fonction et f'(x) sa dérivée au point x. Et, soit Δx, un accroissement à la valeur de x.



Un accroissement Δx engendre :

- Un accroissement des images de la fonction, noté Δy :

$$\Delta y = f\,(x + \Delta x) - f(x)$$

- Un accroissement des images de la droite tangente en x, noté dy. Sachant que la pente de la tangente à la fonction en x est f'(x), il vient :

$$f'(x) = \frac{\text{Accroissement des y}}{\text{Accroissement des x}} = dy/\Delta x \rightarrow dy = f'(x)\,\Delta x$$

$$\boxed{dy = f'(x)\,\Delta x}$$

b) Exercices

Exercice 1

Considérons la fonction définie par l'équation $f(x) = x^2$. Pour x = 2 et Δx = 0,1, calculez Δy et dy.

Réponse

On a :

Δy = f (x + Δx) - f(x) = f (2 + 0,1) - f (2) = f (2,1) - f(2) = 4,41 - 4 = 0,41

Δy = 0,41

dy = f'(x) Δx → f'(x) = 2x

dy = f' (2) (0,1) = 2(2) (0,1) = 0,4

dy = 0,4

Remarque

À partir de cet exercice, on constate que Δy, qui dépend des fonctions, peut être supérieur ou inférieur à dy. Mais, généralement, on a :

$$\boxed{\text{Si } \Delta x \text{ est petit alors } \Delta y \approx dy}$$

Exercice 2

Sans vous aider de la calculatrice, donner une approximation de la racine carrée de 17.

Réponse

Pour obtenir une approximation d'une racine carrée d'un nombre, on considère la fonction suivante :

F (x) = $\sqrt{x}$
La dérivée de f(x) est : f'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

On sait que le carré parfait le plus proche de 17 est 16, l'accroissement de f(x) lorsque x passe de 16 à 17 est donc :
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(17) - f(16)$
$\Delta y = \sqrt{17} - \sqrt{16} \rightarrow \sqrt{17} = \sqrt{16} + \Delta y$
$\sqrt{17} = \sqrt{16} + \Delta y$

On a vu plus haut que si Δx est petit, alors dy ≈ Δy. Par conséquent, on peut écrire :
$\sqrt{17} = \sqrt{16} + dy$
$\approx 4 + f'(x)\,\Delta x$ (x= 16 et Δx = 17 - 16 = 1)
$\approx 4 + f'(16)\,(1)$
$\approx 4 + \frac{1}{2\sqrt{16}} = 4 + \frac{1}{8} = 4{,}125$
$\sqrt{17} = 4{,}125$

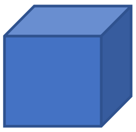
Exercice 3
À l'aide de la différentielle, démontrer que si h est petit, alors $(1 + \frac{h}{2})$ est une bonne approximation de $\sqrt{1 + h}$.

Réponse
Pour cette démonstration, on utilise la fonction f(x) = $\sqrt{x}$ et sa dérivée f'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. L'accroissement de f(x) lorsque x passe de 1 à (1 + h) est :
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(h + 1) - f(1) = \sqrt{1 + h} - \sqrt{1}$
$\Delta y = \sqrt{1 + h} - \sqrt{1}$

Par hypothèse, h est petit, alors Δy ≈ dy. Il vient donc :
$dy = f'(x)\,\Delta x \approx \sqrt{1 + h} - \sqrt{1}$
$dy = \frac{1}{2\sqrt{1}} h \approx \sqrt{1 + h} - \sqrt{1}$ (x = 1 et dx = h)

$\sqrt{1 + h} \approx \frac{h}{2} + 1$

Exercice 4
En vous aidant de la différentielle, déterminer le volume de peinture en litres nécessaire pour recouvrir un cube de 10 dm de côté avec une couche de peinture de 0,001 dm d'épaisseur.



Réponse
Si c représente la longueur du côté du cube, son volume est donc égal à :
$V = c^3 \rightarrow V' = 3c^2$

Sachant que c = 10 et Δc = 0,002, le volume de peinture nécessaire pour recouvrir le cube correspond à :
$V(10 + 0{,}002) - V(10) = \Delta V$

Etant donné que Δc est petit, alors ΔV ≈ dV. Ainsi, on obtient :
$V(10 + 0{,}002) - V(10) = \Delta V \approx dV \approx 3c^2 \times \Delta c \approx 3\,(10)^2 \times (0{,}002) \approx 06\ dm^3$
$dV \approx 0{,}6\ dm^3$ = 0,6 litre

Exercice 5

En mesurant le rayon d'une sphère, on obtient 21 cm. L'erreur possible durant la mesure peut être estimée à 0,05 cm. En vous aidant de la différentielle :

a) Quelle est l'erreur maximale que cette mesure peut produire sur le calcul du volume de la sphère ?
b) Quelle est l'erreur relative correspondante ?

Réponse

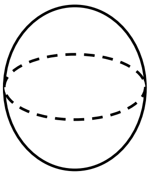
En désignant par r le rayon de la sphère, le volume de celle-ci est donné par la relation suivante :

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = f(r) \rightarrow V' = 4\pi r^2 = f'(r)$

a) Erreur maximale

L'erreur maximale possible sur le volume est estimée par l'expression suivante :

$V(21 + 0{,}05) - V(21) = \Delta V$ $\quad$ ($r = 21$ et $\Delta r = 0{,}05$)



Sachant que Δr est petit, aussi $\Delta V \approx dV$. Il vient :

$dV = f'(r)\,\Delta r = 4\pi r^2\,\Delta r \approx \Delta V$

$= 4\pi(21)^2(0{,}05)$

$= 276{,}948\ cm^3 \approx 277\ cm^3$

$dV \approx 277\ cm^3$

b) Erreur relative correspondante

$dV \approx 277\ cm^3$. Cette valeur peut paraitre très grande. Si on veut avoir une meilleure idée sur l'ordre de grandeur de cette erreur, on utilise généralement la notion « d'erreur relative ». Pour cette exercice, l'erreur relative est obtenue en divisant l'erreur maximale par le volume total de la sphère. Soit :

$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{277}{\frac{4\pi(21)^3}{3}} = 0{,}00714 = 0{,}7\%$

$\frac{\Delta V}{V} = 0{,}7\%$

On en déduit que l'erreur relative du rayon $\frac{\Delta r}{r} = \frac{0{,}05}{21} = 0{,}00238 \approx$ **0,24%**, entraine une erreur relative de **0,7%** dans le calcul du volume de la sphère.

c) Propriétés de la différentielle

La différentielle et la dérivée sont deux notions très proches l'une de l'autre. La majorité des propositions et formules relatives à la dérivée sont valables pour la différentielle.

* Soient $u = u(x)$ et $v = v(x)$, on a :

- $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')\,dx = u'\,dx \pm v'\,dx = du \pm dv$

- $d(uv) = vdu + udv$

- $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

* Si $y = f(x)$ et $u = g(x)$, alors : $dy = f'(u)\,du$

Etant donné que $du = g'(x)\,dx$, en appliquant la règle de dérivation en chaine, on obtient :

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \rightarrow dy = f'(u)\,g'(x)\,dx$

* Si $u = u(x)$, alors :

$d(u^n) = n\,u^{n-1}\,du$ $\quad$ (n est une constante réelle)

$d(e^u) = e^u\,du$

$d(\ln u) = \frac{1}{u}\,du$

2. L’intégrale indéfinie

a) Rappel

La dérivation est une opération qui s’applique aux fonctions. Plusieurs fonctions possèdent leurs inverses. À titre d’exemple :

$y = e^x$ → $y = \ln x$

$y = \sin x$ → $y = \arcsin x$

Existe-il un procédé inverse de la dérivation qui permet de retrouver une fonction dont on connait la dérivée ? La réponse à cette question est oui, ce procédé s’appelle « l’intégration ».

Dérivation	Intégration
$y' = 3x^2$	$y = x^3$
$y' = e^x$	$y = e^x$
$y' = \sin x$	$y = -\cos x$

Supposons que $f(x) = 2x$ représente la dérivée de la fonction $F(x)$. Plusieurs réponses sont acceptables : $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 + 1$, $F(x) = x^2 - 5$, etc.

Une fonction $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$ sur l’intervalle $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$

Il existe une infinité de primitives à une fonction. Une primitive quelconque de la fonction $f(x) = 2x$ a la forme suivante :

$$\boxed{F(x) = x^2 + C}$$

Où,

$F(x)$: primitive de $f(x)$

C : constante réelle

b) Définition de l’intégrale indéfinie

On appelle « intégrale indéfinie » d’une fonction $f(x)$, l’ensemble de toutes les primitives de cette fonction. L’intégrale indéfinie est représentée par :

$$\boxed{F(x) + C}$$

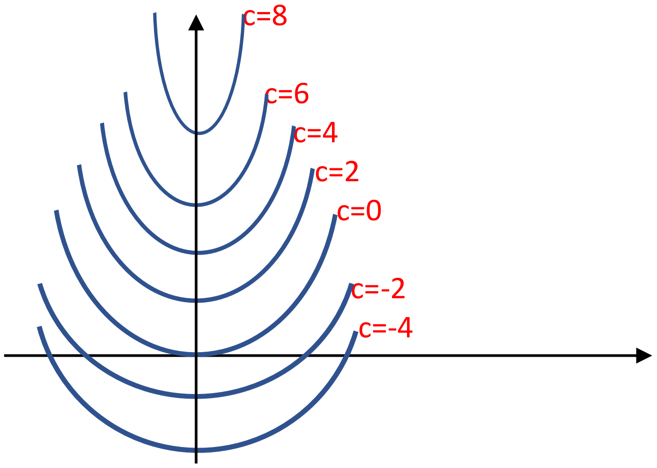
Où,

$F(x)$: primitive de $f(x)$

C : constante réelle

Graphiquement, on peut considérer l’intégrale indéfinie comme une famille de courbes que l’on obtient par translation verticale. Ainsi, l’intégrale indéfinie de $f(x) = 2x$, correspond à $(x^2 + C)$.

La famille de courbes associées à $(x^2 + C)$ est représentée à la figure suivante :



Remarque importante

Il n'existe pas de méthode générale d'intégration. Certaines règles de dérivation servent à intégrer. La règle d'intégration d'une puissance d'une variable est l'une des plus simples à appliquer.

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ pour } n\neq -1}$$

Exemple

$$\int \left(3x^3 + \frac{2}{x}\right) dx = \int 3x^3 + \int \frac{2}{x} dx = 3\int x^3 dx + 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$= 3 \left(\frac{x^4}{4} + C_1\right) + 2 (\ln|x| + C_2)$$

$$= 3 \ \frac{x^4}{4} + 3C_1 + 2 \ln|x| + 2C_2$$

$$= 3 \ \frac{x^4}{4} + 2 \ln|x| + C$$

$$\boldsymbol{\int \left(3x^3 + \frac{2}{x}\right) dx = 3 \ \frac{x^4}{4} + 2 \ln|x| + C}$$

c) Equations différentielles simples

Toute équation contenant une dérivée est appelée une « équation différentielle ». Voici 3 équations différentielles simples :

1) $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{x} - 1$
2) $P\frac{dp}{dt} - \frac{5}{t} = 1$
3) $\frac{d^2S}{dt^2} = a$

L'ensemble des fonctions vérifiant une équation différentielle est appelé « la solution de l'équation différentielle ».

Exercice 1

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$\frac{dr}{dt} = 5\sqrt{t}\,(t - 3)$

Réponse

$\frac{dr}{dt}$ peut être considérée comme un quotient de deux différentielles. Ainsi, on a :

$\frac{dr}{dt} = 5\sqrt{t}\,(t - 3) \rightarrow dr = 5\sqrt{t}\,(t - 3)\ dt$

Ce qui donne :

$$\int dr = \int 5\sqrt{t}\,(t - 3)\ dt = r + C_1 = \int 5\sqrt{t}\,(t - 3)\ dt$$

$$r + C_1 = \int 5\sqrt{t}\,(t - 3)\ dt = 5\int (t^{3/2} - 3t^{1/2})\ dt$$

$$= 5\int t^{3/2}\ dt - 15 \int t^{1/2}\ dt$$

$$= 5\ \frac{t^{5/2}}{5/2} - 15\ \frac{t^{3/2}}{3/2}$$

$\boldsymbol{r = 2t^{5/2} - 10\ t^{3/2} + C}$

Exercice 2

Quelle est la solution particulière de l'équation différentielle de l'exercice 1 ($r = 2t^{5/2} - 10\ t^{3/2} + C$) qui vérifie la condition, pour $t = 1$, $r = -3$?

Réponse

$r = 2t^{5/2} - 10\ t^{3/2} + C \rightarrow -3 = 2(1)^{5/2} - 10(1)^{3/2} + C \rightarrow -3 = -8 + C \rightarrow C = 5$

La solution particulière de l'équation différentielle est donc :

$\boldsymbol{r = 2t^{5/2} - 10\ t^{3/2} + 5}$

3. Les modèles d'intégration et les méthodes de changement de variable

Les règles d'intégration précédentes (les 3 équations différentielles simples) sont très utiles lorsque l'intégrante peut se mettre sous la forme d'une somme ou d'une différence de puissances de la variable indépendante. Cependant, pour effectuer $\int (x+3)^9$ dx, cette méthode s'avère inefficace. Il existe une technique d'intégration basée sur la « propriété d'invariance de la différentielle » qui permet de résoudre ce type de problème. Cette technique porte le nom de « méthode de changement de variables ». C'est un des plus puissants outils dont on dispose pour effectuer une intégrale indéfinie. Cette méthode consiste à transformer l'équation à Intégrer en introduisant une nouvelle variable, telle que :

$$\boxed{u = u(x)}$$

Il existe plusieurs modèles d'intégration dont les plus usuels sont :

Modèle 1

$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

Exemples

Effectuer :

1) $\int 3\,(3x-5)^6$ dx

Posons : u = 3x - 5 → du = 3 dx → $\int (3x-5)^6 \; 3dx = \int u^6 \; du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{u^7}{7} + C = \frac{(3x-5)^7}{7} + C$

$\boldsymbol{\int (3x-5)^6 \, 3\, dx = \frac{(3x-5)^7}{7} + C}$

2) $\int \frac{1}{(2x+1)^3}$ dx

$\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \int (2x+1)^{-3} dx$

On pose :

u = 2x + 1 → du = 2 dx

D'où,

$\int (2x+1)^{-3} dx = \int u^{-3} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) + C = -\frac{1}{4} u^{-2} + C = -\frac{1}{4\,u^2} + C = -\frac{1}{4\,(2x+1)^2} + C$

$\boldsymbol{\int (2x+1)^{-3} dx = -\frac{1}{4\,(2x+1)^2} + C}$

Modèle 2

$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$

Exemple

Effectuer :

$\int \frac{1}{2-5x}$ dx

On pose :

u = 2 - 5x → du = -5 dx

D'où,

$\int \frac{1}{2-5x}\,dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{5} \ln|u| + C = -\frac{1}{5} \ln|2-5x| + C$

$\boldsymbol{\int \frac{1}{2-5x}\,dx = -\frac{1}{5} \ln|2-5x| + C}$

Modèle 3

$\int b^u \, du = \frac{b^u}{\ln b} + C$ (b>0 et b≠1)

Modèle 4

$\int e^u \, du = e^u + C$

Exemple

Effectuer :

$\int e^{2x} \, dx$

On pose :

u = 2x → du = 2 dx

D'où,

$\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int e^u \, du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

$\boldsymbol{\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C}$

Modèle 5

$\int \sin u \, du = -\cos u + C$

Modèle 6

$\int \cos u \, du = \sin u + C$

Modèle 7

$\int \sec^2 u \, du = \operatorname{tg} u + C$

Modèle 8

$\int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\operatorname{cotg} u + C$

Modèle 9

$\int \sec u \operatorname{tg} u \, du = \sec u + C$

Modèle 10

$\int \operatorname{cosec} u \ \operatorname{cotg} u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$

Modèle 11

$\int \operatorname{tg} u \, du = \ln|\sec u| + C$

Modèle 12

$\int \operatorname{cotg} u \, du = \ln|\sin u| + C$

Modèle 13

$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Modèle 14

$\int \operatorname{cosec} u \, du = \ln|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u| + C$

Exemple

Effectuer :

$\int x \sin x^2 \, dx$

On pose :

$u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}\,\frac{du}{x}$

D'où,

$\int x \sin x^2\,dx = \int x \sin u\,\frac{1}{2}\,\frac{du}{x} = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = -\frac{1}{2}(\cos u + C) = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$

$\boldsymbol{\int x \sin x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C}$

Modèle 15

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a>0)$

Modèle 16

$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\,\mathrm{artg}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a\neq 0)$

Modèle 17

$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \frac{1}{a}\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad (a>0)$

Exemple

Effectuer :

$\int \frac{1}{\sqrt{4^2-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2+3x)(2-3x)}}\,dx$

On pose :

$u = 3x \rightarrow du = 3\,dx$

D'où,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4^2-9x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + C$$

$$= \frac{\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)}{3} + C$$

$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{4^2-9x^2}}\,dx = \frac{\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)}{3} + C}$

4. Equations différentielles

4.1. Equations différentielles à variables séparables

Toute équation différentielle pouvant se mettre sous la forme, g(y) dy = f (x) dx, est dite « à variables séparables ». En intégrant chacun des membres de l'équation ci-dessus, on obtient la solution de l'équation.

Exemple 1

Trouver la fonction f (x) sachant que $\frac{dy}{dx} = xy^2$ et (2, 1) représente un point de la courbe.

Solution

Dans l'équation $\frac{dy}{dx} = xy^2$, on constate que les variables qui apparaissent à droite sont de nature différentes (x et y). On sépare ces variables de sorte à regrouper d'un côté les termes en x, et de l'autre côté, les termes en y. Ainsi, on obtient :

$\frac{dy}{y^2} = x\, dx \rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int x\, dx \rightarrow \int y^{-2}dy = \int x\, dx$

En intégrant chaque membre que l'équation précédente, il vient :
$- \frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C \rightarrow - \frac{1}{y} = \frac{x^2+2C}{2} \rightarrow y = - \frac{2}{x^2+2C}$

Sachant que le point (2, 1) est un point de la courbe définie par, y = f (x), on a donc :
$y = - \frac{2}{x^2+2C} \rightarrow 1 = - \frac{2}{2^2+2C} \rightarrow C = -3$

L'équations recherchée est :
$\mathbf{y = - \frac{2}{x^2-6}}$

Exemple 2
Le taux de croissance d'une culture de bactéries est constamment proportionnel au nombre de bactéries présentes dans la culture. Sachant que ce nombre double tous les trois jours, quel sera le nombre de bactéries dans 20 jours si au départ en compte 1000 bactéries ?

Solution
Dans les conditions idéales (pas d'épidémie, pas de surpopulation, pas de prédateurs, …), le taux de croissance d'une population (bactéries, êtres humains, …) est, à chaque instant, proportionnel à sa taille.

Par conséquent, si on désigne par N la grandeur d'une population à l'instant ''t'' et par ''k'' une constante, alors, on peut écrire :
$\frac{dN}{dt} = kN$

D'où,
$\frac{dN}{N} = k\, dt \rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int k\, dt = \ln|N| = kt + C$

$\frac{dN}{N} = \ln|N| = kt + C = \ln N = kt + C \qquad (N>0)$

$\ln N = kt + C \rightarrow N = e^{kt+C} \rightarrow N = e^{kt} \times e^{C}$

Par Hypothèse, à l'instant t = 0, N (0) = 1000 bactéries. On obtient donc :
$1000 = e^{C} \rightarrow N = 1000\, e^{kt}$

$\mathbf{N = 1000\, e^{kt}}$

Puisque N (t=3) = 2000 (N double tous les 3 jours), l'équation précédente devient :
$2000 = 1000\, e^{3k} \rightarrow 2 = e^{3k} \rightarrow 3k = \ln 2 \rightarrow k = \frac{\ln 2}{3}$

Et, on obtient :
$N = 1000\, e^{(1/3 \ln 2)t}$

Le nombre de bactéries dans les 20 jours atteindra la valeur suivante :
$N = 1000\, e^{(1/3 \ln 2)t} = 1000\, e^{(1/3 \ln 2)20} = 1000\, e^{4,6} = 101593,67$ bactéries
N = 101593,67 bactéries

N ≈ 101594 bactéries

Remarque

Si $\frac{dy}{dt} = ky$ et $y = y_0$ lorsque $t = 0$, alors la solution de l'équation différentielle pour la condition initiale donnée est : $y = y_0\, e^{kt}$

4.2. Equations différentielles linéaires du premier ordre

La résolution de certaines équations différentielles ne peut pas se faire en séparant les variables. Par exemple, pour résoudrai l'équation $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$, il n'est pas possible de séparer les variables. Cependant, on remarque que si on multiplie cette équation par e^{x}, elle devient :

$(\frac{dy}{dx} + y)\, e^{x} = e^{-x}.\, e^{+x} = \frac{dy}{dx} e^{x} + y\, e^{x} = 1 \rightarrow \frac{d\,(e^{x}y)}{dx} = 1 \qquad (\frac{de^{x}}{dx} = e^{x})$

$d\,(e^{x}y) = dx \rightarrow \int(e^{x}y) = \int dx = e^{x}\, y = x + C \rightarrow y = x\, e^{-x} + C\, e^{-x}$

$y = x\, e^{-x} + C\, e^{-x}$

On peut facilement vérifier que, $y = x\, e^{-x} + C\, e^{-x}$, est bien une solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$. En effet, on a :

$\frac{d}{dx}(x\, e^{-x} + C\, e^{-x}) + x\, e^{-x} + C\, e^{-x} \overset{?}{=} e^{-x}$

$e^{-x} - xe^{-x} - Ce^{-x} + xe^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}$ → Vérifiée

a) Définition

Toute équation différentielle pouvant être écrite sous la forme, $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$ où P et Q sont des fonctions continues, est une « équation différentielle linéaire du premier ordre ». Pour résoudre une telle équation, il suffit de multiplier chaque membre de celle-ci par le facteur intégrant suivant :

$$\boxed{I(x) = e^{\int P(x)dx}}$$

b) Exercice

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x^2$

Réponse

L'équation à résoudre est de la forme $\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$ avec :

$P(x) = 3x^2$

$Q(x) = 6x^2$

Le facteur intégrant de cette équation a la forme :

$I(x) = e^{\int P(x)dx}$

Où,

$\int 3x^2\, dx = x^3 \rightarrow e^{\int P(x)dx} = e^{x3}$

En multipliant chaque membre de l'équation à résoudre par e^{x3}, on obtient :

$(\frac{dy}{dx} + 3x^2 y)\, e^{x3} = (6x^2)\, e^{x3} \rightarrow \underbrace{e^{x3} \frac{dy}{dx} + 3x^2 y\, e^{x3}} = 6x^2\, e^{x3}$

$\frac{d(e^{x3}y)}{dx} = 6x^2\, e^{x3} \rightarrow d(e^{x3}y) = 6x^2\, e^{x3}\, dx$

$e^{x3}y = \int 6x^2\, e^{x3} dx = 2\, e^{x3} + C$

La solution est donc :

$y = 2 + C\, e^{-x3}$

Vérification

$y = 2 + C\,e^{-x3}$ est-elle une solution de l'équation $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$?

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = \frac{d\,(2 + C\,e^{-x3})}{dx} + 3x^2\,(2 + C\,e^{-x3})$$
$$= C\,e^{-x3}\,(-3x^2) + 6x^2 + 3x^2\,Ce^{-x3}$$
$$= 6x^2$$

$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ → Vérifiée

$y = 2 + C\,e^{-x3}$ est bien une solution de l'équation $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

4.3. Méthode de complétion du carré

a) Définition

La méthode de complétion du carré est une technique qui consiste à ajouter une certaine valeur à une équation de la forme $(ax^2 + bx)$ de façon à obtenir un trinôme carré de la forme $(ax^2 + bx + c)\,(ax^2 + bx + c)$. Autrement dit, cette méthode permet de déterminer si un trinôme peut être factorisé et, si c'est le cas, trouver les deux facteurs.

Dans certains cas, on utilise cette méthode pour ramener un problème à celui du modèle 15 ou à celui du modèle 16. À titre d'exemple, le binôme $(x^2 + bx)$ devient carré parfait si on lui ajoute $\frac{b^2}{4}$.

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = (x + \frac{b}{2})^2$$

b) Exercices

- Effectuer :

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{x^2+4x+4-4+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2}$$

On pose :

$x + 2 = u$ → $du = dx$

D'où,

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} = \int \frac{du}{u^2+3^2} = \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\text{artg}\,(\frac{u}{a}) + C = \frac{1}{3}\,\text{artg}\,(\frac{x+2}{3}) + C$$

$$\boldsymbol{\int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\,\textbf{artg}\,(\frac{x+2}{3}) + C}$$

- Effectuer

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx$$

En raison du facteur (x+1) au numérateur de l'expression ci-dessus, la complétion du carré $(x^2 - 4x + 8)$ ne permet pas de ramener le problème au modèle : $\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du$

Cependant, comme, $u = x^2 - 4x + 8$ et $du = (2x - 4)\,dx$, on peut essayer de ramener le problème à celui du modèle $\int \frac{du}{u}$ en procédant comme ce qui suit :

$$\frac{x+1}{x^2-4x+8} = \frac{2\,(x+1)}{2\,(x^2-4x+8)} = \frac{2x+2}{2\,(x^2-4x+8)} = \frac{2x-4+4+2}{2\,(x^2-4x+8)} = \frac{2x-2}{2\,(x^2-4x+8)} + \frac{6}{2\,(x^2-4x+8)} = \frac{2x-2}{2\,(x^2-4x+8)} + \frac{3}{x^2-4x+8}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

Pour la première intégrale, on pose :

$u = x^2 - 4x + 8$ → $\frac{du}{dx} = 2x - 4$ → $du = (2x - 4)\,dx$

Après transformation de la deuxième intégrale, on obtient :

$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{1}{(x-2)^2+2^2}\, dx$

Et, en posant :
a = 2
u = x - 2 → du = dx

D'où,

$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{du}{u^2+a^2}$

$\boldsymbol{\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\, dx = \frac{1}{2} \ln|x^2 - 4x + 8| + \frac{3}{2}\, \mathrm{artg}\, (\frac{x-2}{2}) + C}$

4.4. Intégration par parties

La méthode « d'intégration par parties » permet de transformer l'intégrale d'un produit de deux fonctions [u = u(x) et v = v(x)] en d'autres intégrales. Cette méthode est souvent utilisée après celle du changement de variable. Elle est basée sur une propriété de la différentielle : d(uv) = udv + vdu. Par conséquent :

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

Exemple

$\int x\, e^x\, dx$

Comme, $\int u\, dv = uv - \int v\, du$, on peut écrire :
u = x et dv = e^x dx

On obtient :
du = dx et $\int dv = \int e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

$\int x\, e^x\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$

$\boldsymbol{\int x\, e^x\, dx = xe^x - e^x + C}$

Remarques

1) Pour trouver la fonction v, il n'est pas nécessaire d'ajouter la constante d'intégration C. On peut démontrer cette affirmation comme ce qui suit :
Si, u = x et dv = e^x dx, alors :

$$\begin{aligned} du = dx \text{ et } v = \int e^x dx = e^x + C \rightarrow \int x\, e^x\, dx = \int u\, dv &= x\,(e^x + C) - \int (e^x + C)\, dx \\ &= x\, e^x + xC - \int e^x\, dx - Cx \\ &= x\, e^x - \int e^x\, dx \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx}$

Avec ou sans constante, on obtient le même résultat.

2) Il existe d'autres façons de transformer le problème précèdent, comme par exemple :
u = e^x et dv = x dx → du = e^x dx et $v = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$

D'où,

$\int x\, e^x\, dx = \frac{1}{2} e^x x^2 - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$

Mais, avec cette transformation on aboutit à l'intégrale « $\int \frac{x^2}{2} e^x dx$ » qui n'est pas facile à résoudre. Par conséquent, cette transformation est à rejeter.

Pour que la méthode d'intégration par parties soit efficace, il faut que $\int dv$ et $\int v\, du$ soient plus faciles à résoudre que $\int u\, dv$.

4.5. Intégration de certaines fonctions trigonométriques

Les classes de fonctions trigonométriques les plus fréquemment rencontrées sont :

1e cas

On distingue :

1) $\int (\sin^{imp} u)\,(\cos^{n} u)\, du$
2) $\int (\sin^{n} u)\,(\cos^{imp} u)\, du$

Où,
n : réel naturel
imp : entier positif impair
pair : entier positif pair

Pour ce premier cas, on commence d'abord par transformer ($\sin^{imp}u$) en ($\sin^{pair}u$) en utilisant l'identité $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Après cette transformation, il faut exprimer $\sin^{pair}u$ en fonction de cosu.

Exemple

Effectuer :

$\int (\sin^3 x)\,(\cos^2 x)\, dx = \int (\sin^2 x)\,(\cos^2 x)\,(\sin x)\, dx = \int (1-\cos^2 x)\,(\cos^2 x)\,(\sin x)\, dx$

$= \int (\cos^2 x)\,(\sin x)\, dx - \int (\cos^4 x)\,(\sin x)\, dx$

On pose :

$u = \cos x \rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \rightarrow du = -\sin x\, dx$

Cela donne donc :

$\int (\cos^2 x)\,(\sin x)\, dx = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + c_1$

$\int (\cos^4 x)\,(\sin x)\, dx = -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + c_2$

$\boldsymbol{\int (\sin^3 x)\,(\cos^2 x)\, dx = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C}$

2e cas

On distingue :

1) $\int (\sin^{pair} u)\,(\cos^{pair} u)\, du$
2) $\int (\sin^{pair} u)\, du$
3) $\int (\cos^{pair} u)\, du$

Pour ces fonctions, on diminue les exposants pairs jusqu'à ce que le problème devienne facilement intégrable. Pour ces transformations, on utilise les identités suivantes :

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\sin\theta \cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$

Exemple

$\int (\sin^2 x) (\cos^2 x)\, dx = \int (\sin x \cos x)^2\, dx = \int (\frac{\sin 2x}{2})^2\, dx$

$= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4} \int (\frac{1-\cos 4\theta}{2})\, dx$

$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x\, dx$

On pose :

$u = 4x \rightarrow du = 4\, dx$

$\int (\sin^2 x) (\cos^2 x)\, dx = \frac{1}{32} \int du - \frac{1}{32} \int \cos u\, du$

$= \frac{1}{32} u - \frac{1}{32} \sin u + C$

$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$

$\boldsymbol{\int (\sin^2 x) (\cos^2 x)\, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C}$

3

On rencontre :

1) $\int (tg^n u) (sec^{pair} u)\, du$
2) $\int (cotg^n u) (cosec^{pair} u)\, du$

Où,

n : réel quelconque

pair : entier positif pair

Pour (1), on commence par transformer $(sec^{pair} u)$ en $(sec^{pair-2}\, u)\, (sec^2 u)$. Par la suite, en utilisant l'identité $(tg^2\theta + 1 = sec^2\theta)$, on exprime $(sec^{pair-2}\, u)$ en fonction de tgu.

Pour (2), on procède de la même manière en utilisant l'identité : $cotg^2\theta + 1 = cosec^2\theta$

Exemple

Effectuer :

$\int (tg^{3/2} x) (sec^4 x)\, dx = \int (tg^{3/2} x) (sec^2 x) (sec^2 x)\, dx = \int (tg^{3/2} x) (1+tg^2 x) (sec^2 x)\, dx$

$\int (tg^{3/2} x) (sec^4 x)\, dx = \int (tg^{3/2} x) (sec^2 x)\, dx + \int (tg^{7/2} x) (sec^2 x)\, dx$

On pose :

$u = tgx \rightarrow du = sec^2 x\, dx$

$\int (tg^{3/2} x) (sec^4 x)\, dx = \int (u^{3/2})\, du + \int (u^{7/2})\, du = \frac{u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{9/2}}{9/2} + C = \frac{2}{5} tg^{5/2} x + \frac{2}{9} tg^{9/2} x + C$

$\boldsymbol{\int (tg^{3/2} x) (sec^4 x)\, dx = \frac{2}{5} tg^{5/2} x + \frac{2}{9} tg^{9/2} x + C}$

4

On trouve :

1) $\int (tg^{imp} u) (sec^n u)\, du$
2) $\int (cotg^{imp} u) (cosec^n u)\, du$

Où,

n : réel quelconque

impair : entier positif impair

Pour la fonction (1), on commence par transformer ($tg^{imp}u$) ($sec^{n}u$) en ($tg^{imp-1}u$) ($sec^{n-1}u$). Ensuite, on exprime ($tg^{imp-1}u$) en fonction de (secu).

Pour la fonction (2), on procède de la même manière, mais en utilisant l'identité ($cotg^2\theta + 1 = cosec^2\theta$).

Exemple

$$\int (tg^3x)\,(sec^3x)\,dx = \int (tg^2x)\,(sec^2x)\,(tgx)\,(secx)\,dx = \int (sec^2x - 1)\,(sec^2x)\,(tgx)\,(secx)\,dx$$
$$= \int [(sec^4x)\,(sec^2x)\,(tgx) - (sec^2x)\,(secx)\,(tgx)]\,dx$$

On pose :

u = secx → du = (secx) (tgx) dx

$$\int (tg^3x)\,(sec^3x)\,dx = \int u^4du - \int u^2du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$$

$$\boldsymbol{\int (tg^3x)\,(sec^3x)\,dx = \frac{sec^5x}{5} - \frac{sec^3x}{3} + C}$$

5^e cas

On rencontre :

1) $\int (tg^{pair}u)\,(sec^{imp}u)\,du$
2) $\int (cotg^{pair}u)\,(cosec^{imp}u)\,du$

Pour ces deux types de fonctions, l'intégration se fait par parties.

4.6. Intégration des fonctions rationnelles par des fractions partielles

a) Fraction partielle

Pour tout x ≠ ±1, on peut transformer la fonction $\frac{2}{x^2-1}$ en deux fonctions, qui sont :

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

On dira de cette transformation que la fonction rationnelle $\frac{2}{x^2-1}$ peut être décomposée en une somme de deux fonctions appelées « fractions partielles ». Ces fractions sont : $\frac{1}{x-1}$ et $\frac{1}{x+1}$.

Par conséquent, on peut écrire :

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x - 1| - \ln|x + 1|$$

b) Décomposition en fractions partielles

Pour décomposer en fractions partielles, il existe une démarche purement algébrique qui repose sur un résultat d'algèbre. La décomposition obtenue par cette démarche est unique.

c) Fraction rationnelle propre

Une fraction rationnelle propre est une expression rationnelle dont le degré du polynôme au numérateur est inférieur au degré du polynôme au dénominateur. Dans le cas contraire, la fraction est qualifiée d'impropre.

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2-1} = x + \frac{2}{x^2-1}$$

Fraction rationnelle impropre **Fraction rationnelle propre**

d) Organigramme pour décomposer une fraction rationnelle $\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}}$ en fractions partielles

1) Si la fraction rationnelle est impropre, on doit au préalable diviser P(x) par Q(x). Ensuite, on applique la technique de décomposition sur l'expression correspondant au reste de cette division.

2) On décompose le dénominateur sous la forme d'un produit de facteurs linéaires (ax+b) à coefficients réels et/ou quadratiques irréductibles (ax^2+ bx + c) à coefficients réels.

Un facteur quadratique est irréductible si (b^2 - 4ac) < 0.

3) Le nombre et la forme des fractions partielles dépendent uniquement de la factorisation obtenue au dénominateur.

- À chaque « facteur linéaire » (ax + b) apparaissant n fois au dénominateur, correspond une somme de n fractions partielles de la forme :

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^{\,2}} + \frac{A_3}{(ax+b)^{\,3}} + \text{..........} + \frac{A_n}{(ax+b)^{\,n}}$$

- À chaque « facteur quadratique irréductible » (ax^2+ bx + c) apparaissant n fois au dénominateur correspond une somme de n fractions partielles de la forme :

$$+ \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \text{........} + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

4) On détermine la valeur des constantes A_1, B_1, A_2, B_2, …, A_n, B_n.

e) Exemples de fractions rationnelles propres transformées en fractions partielles

1) $\frac{x+1}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{(x+4)} + \frac{B}{(x-1)}$

2) $\frac{x^2}{(x+2)^{\,3}} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^{\,2}} + \frac{C}{(x+2)^{\,3}}$

3) $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$

4) $\frac{x^3+2x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}$

5) $\frac{x^4-1}{x^3(x-1)\,(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex+F}{x^2+2}$

6) $\frac{2x-1}{(x-3)^2\,(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^{\,2}} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^{\,2}}$

À propos des constantes A, B, C, …, F, elles seront déterminées avec les exercices suivants :

Exercice 1

Effectuer :

$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

On remarque que ($\frac{2}{x^2-1}$) est une fraction rationnelle propre. On peut écrire donc :

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$

Par conséquent :

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \rightarrow \frac{2}{x^2-1} = \frac{A\,(x+1) + B\,(x-1)}{(x-1)(x+1)}$ pour tout x ∈ R/ $\{-1, +1\}$

Aussi, pour tout x ∈ R, on a :

2 = A (x + 1) + B (x - 1) → 0x + 2 = (A + B) x + (A - B) (en regroupant les puissances en x)

$$\boxed{0x + 2 = (A + B)\,x + (A - B)}$$

Pour déterminer les valeurs des constantes A et B, on utilise les deux méthodes suivantes :

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne :

A = +1

B = -1

Les valeurs des constantes A et B peuvent aussi être déterminées en utilisant l'équation :

2 = A (x + 1) + B (x - 1) pour tout x

Donc,

Si x = 1 → 2 = A (1 + 1) + B (1 - 1) → 2 = 2A → A = 1

Si x = -1 → 2 = A (-1 + 1) + B (-1 - 1) → 2 = -2B → B = -1

On en conclut :

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{-1}{(x+1)}$ pour tout x ∈ R/$\{-1, +1\}$

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$\boldsymbol{\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C}$$

Exercice 2

Effectuer :

$$\int \frac{2x^3-6x^2-2}{x\,(x-2)(x^2+1)}\,dx$$

L'intégrante se décompose en trois fractions partielles, qui sont :

$$\frac{2x^3-6x^2-2}{x\,(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \text{ pour tout } x \in R/\{0, +2\}$$

$$= \frac{A\,(x-2)(x^2+1) + Bx\,(x^2+1) + (Cx+D)\,x\,(x-2)}{x\,(x-2)(x^2+1)}$$

Pour tout x∈ R, on a :

$2x^3 - 6x^2 - 2 = A\,(x - 2)(x^2 + 1) + Bx\,(x^2 + 1) + (Cx + D)\,x\,(x - 2)$

En regroupant les puissances en x, on obtient :

$2x^3 - 6x^2 - 2 = (A + B + C)\,x^3 + (-2A - 2C + D)\,x^2 + (A + B - 2D)\,x - 2A$

Ceci donne donc :

$$\begin{cases} 2 = A + B + C \\ -6 = -2A - 2C + D \\ 0 = A + B - 2D \\ -2 = -2A \quad \rightarrow \mathbf{A = 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} B + C = 1 \\ -2C + D = -4 \\ B - 2D = -1 \end{cases}$$

En remplaçant x par 2 dans l'équation [$2x^3 - 6x^2 - 2 = A\,(x - 2)(x^2 + 1)+Bx\,(x^2 + 1)+(Cx + D)\,x\,(x - 2)$], on obtient :

B = -1

La substitution de cette valeur au système précédent donne :

C = 2

D = 0

Par conséquent :

$$\int \frac{2x^3-6x^2-2}{x\,(x-2)(x^2+1)}\,\mathbf{dx} = \int \frac{1}{x}\,\mathbf{dx} + \int \frac{-1}{x-2}\,\mathbf{dx} + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathbf{dx}$$

Remarque

Les fractions rationnelles, $\frac{2}{(x+3)^{3}}$, $\frac{5x}{(x^2+1)^{2}}$ ou $\frac{2x+3}{x^2+x+1}$ ne sont pas décomposables en fractions partielles.

Toute expression de la forme, $\frac{A}{(ax+b)^{n}}$ ou $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{n}}$, avec $(ax^2 + bx + c)$ irréductible est indécomposable en fractions partielles. En effet, puisque la décomposition en fractions partielles est unique et que, $\frac{A}{(ax+b)^{n}} = \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$, alors, les constantes A_1, A_2, …, A_{n-1} sont nécessairement nulles tandis que la valeur de A_n doit être égale à A.

On démontre aussi que la fonction rationnelle $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{n}}$ est aussi indécomposable en fractions partielles.

4.7. Intégration par substitutions trigonométriques

a) Cas 1

Effectuer :

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$$

On peut faire le changement de variable suivant :

x = g(u)

Ce changement est permis à condition que la fonction g(u) soit dérivable et admette une fonction inverse dérivable $u = g^{-1}(x)$.

Pour faire disparaitre le radical dans cette expression, il suffit de poser : x = sinu, où :

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$

dx = cosu du

Ainsi, on peut obtient :

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin^2 u}\cos u\,du = \int \frac{\sqrt{\cos^2 u}}{\sin^2 u}\cos u\,du$$

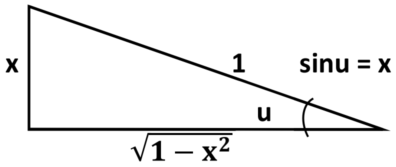
Si, $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$, alors cosu > 0 et $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$

Sachant que $1 + \cot^2 g\,u = \mathrm{cosec}^2 u$, alors :

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{\cos^2 u}}{\sin^2 u}\cos u\,du = \int \mathrm{cotg}^2 u\,du = \int (\mathrm{cosec}^2 u - 1)\,du = \mathrm{cotg}u - u + C$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \mathrm{cotg}u - u + C$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathbf{dx = cotgu - u + C}$$



Étant donné que x = sin u, alors, cotgu = $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ et u = arcsinx. Par conséquent,

$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ dx = $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ - arcsinx + C

b) Cas 2

Dans le cas où l'intégrante contient une racine ayant une de ces formes, $\sqrt{a^2-v^2}$, $\sqrt{a^2+v^2}$ ou $\sqrt{v^2-a^2}$, il est possible d'éliminer cette racine de l'expression à intégrer en utilisant une substitution trigonométrique adéquate. Par exemple :

- Si la fonction à intégrer contient une expression de la forme $\sqrt{a^2-v^2}$ (a > 0), il suffit de poser : v = a sinu ($-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$) pour faire disparaitre la racine carrée.

Soit le changement de variable suivant :
v = a sinu → u = arcsin $(\frac{v}{a})$

Avec ce changement, on a :
$\sqrt{a^2-v^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2u} = \sqrt{a^2(1-\sin^2u)} = \sqrt{a^2\cos^2u}$ = a cosu
$\sqrt{a^2-v^2}$ = a cosu

- Si la fonction à intégrer contient une expression de la forme $\sqrt{a^2+v^2}$ avec a > 0, dans ce cas, pour faire disparaître la racine carrée, il suffit de poser : v = a tgu, où $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ → u = arctg $(\frac{v}{a})$

Avec ce changement de variable, on obtient :
$\sqrt{a^2+v^2} = \sqrt{a^2+a^2\text{tg}^2u} = \sqrt{a^2(1+\text{tg}^2u)} = \sqrt{a^2\sec^2u}$ = a secu
$\sqrt{a^2+v^2}$= a secu

- Si la fonction à intégrer contient une expression de la forme $\sqrt{v^2-a^2}$ avec a > 0, dans ce cas, pour faire disparaître la racine carrée, il suffit de poser :
v = a secu, où, $0 \leq u < \frac{\pi}{2}$ et $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$ → u = arsec $(\frac{v}{a})$

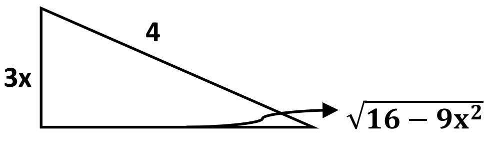
Avec ce changement de variable, on aboutit à :
$\sqrt{v^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2u-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2u-1)} = \sqrt{a^2\text{tg}^2u}$ = a tgu
$\sqrt{v^2-a^2}$ = a tgu

c) Exercices

1) Trouver $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}}$

Avant d'utiliser une substitution trigonométrique pour intégrer la fonction ci-dessus, il faut d'abord vérifier que cette dernière ne peut pas être résolue plus simplement par une autre méthode. Dans le cas où il n'y a pas de solutions plus rapides, alors on utilise l'intégration par substitution trigonométrique.

Pour cet exercice, on pose :
u = arcsin $(\frac{3x}{4})$ → sinu = $\frac{3x}{4}$ → x = $\frac{4}{3}$ sinu → $\frac{dx}{du} = \frac{4}{3}$ cosu → dx = $\frac{4}{3}$ cosu du
16 - 9x^2 = (4 - 3x) (4 + 3x) = 16 (1 - sinu) (1 + sinu) = 16 (1 - sin^{2}u) = 16 cos^{2}u = (4 cosu)^2
$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}} = \int \frac{\frac{4}{3}\cos u\,du}{(\frac{16}{9}\sin^2u)\sqrt{16-9x^2}} = \int \frac{\frac{4}{3}\cos u\,du}{(\frac{16}{9}\sin^2u)\,(4\cos u)} = \frac{3}{16}\int \text{cosec}^2u\,du = -\frac{3}{16}$ cotgu + C
$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}} = -\frac{3}{16}$ cotgu + C



Etant donné que, sinu = $\frac{3x}{4}$, alors :

cotgu = $\frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x}$ → $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}} = -\frac{3}{16}\frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x} + C$

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}} = -\frac{3}{16}\frac{\sqrt{16-9x^2}}{3x} + C = -\frac{\sqrt{16-9x^2}}{16x} + C$

$\boldsymbol{\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-9x^2}} = -\frac{\sqrt{16-9x^2}}{16x} + C}$

2) Trouver $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$

On pose : u = arctg($\frac{2x}{3}$) → tgu = $\frac{2x}{3}$ → x = $\frac{3}{2}$ tgu → dx = $\frac{3}{2}$ sec^{2}u du

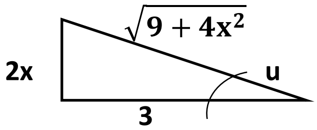
$9 + 4x^2 = 3^2 + (2x)^2 = (3 + 2x)^2 - 12x = [3\ (1 + tgu)]^2 - 2 \times 3^2\ tgu = 3^2[(1 + tgu)^2 - 2tgu] = 3^2[1 + tg^2u] = 3^2\ sec^2u$

$\sqrt{3^2 sec^2u} = 3\ secu$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}sec^2u\ du}{(\frac{3}{2}tgu)(3secu)} = \frac{1}{3}\int \frac{secu\ du}{tgu} = \frac{1}{3}\int cosecu\ du = \frac{1}{3}\ln|cosecu - cotgu| + C$

Etant donné que :

tgu = $\frac{2x}{3}$ →



cosecu = $\frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{2x}$ → cotgu = $\frac{2x}{3}$

Par conséquent :

$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}\ln|cosecu - cotgu| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{2x} - \frac{2x}{3}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9 + 4x^2 - 3}}{2x}\right| + C$

$\boldsymbol{\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9 + 4x^2 - 3}}{2x}\right| + C}$

3) Trouver$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3}$ dx

On pose :

u = arcsin ($\frac{x}{5}$) → sec u = $\frac{x}{5}$ → x = 5 secu → $\frac{dx}{du}$ = 5 secu tgu → dx = 5 secu tgu du

Ainsi, on obtient :

$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{5^2 sec^2u - 25}}{5^3 sec^3u}\ 5\ secu\ tgu\ du = \int \frac{(5\sqrt{sec^2u - 1})\ (5\ secu\ tgu\ du)}{5^3 sec^3u} = \int \frac{(5\ tgu)(5\ secu\ tgu\ du)}{125\ sec^3u} = \frac{1}{5}\int \frac{tg^2u\ du}{sec^2u}$

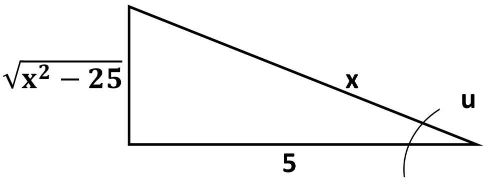
$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3} dx = \frac{1}{5}\int \frac{tg^2u}{sec^2u} du = \frac{1}{5}\int sin^2u\ du = \frac{1}{5}\int(\frac{1-cos2u}{2})\ du = \frac{1}{10}\int du - \frac{1}{10}\int cos2u\ du = \frac{1}{10}u - \frac{1}{20}sin2u + C$

$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3} dx = \frac{1}{10}u - \frac{1}{20}sin2u + C = \frac{1}{10}u - \frac{1}{10}sinu\ cosu + C$

Le triangle établi entre les variables x et u donne :

sinu = $\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}$

cosu = $\frac{5}{x}$



Ainsi, on obtient :

$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3} dx = \frac{1}{10}u - \frac{1}{10}sinu\ cosu + C = \frac{1}{10}\ arc\ sec(\frac{x}{5}) - \frac{1}{10}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}(\frac{5}{x}) + C$

$\boldsymbol{\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^3} dx = \frac{1}{10}\ arc\ sec\ (\frac{x}{5}) - \frac{\sqrt{x^2-25}}{2x^2} + C}$

« Dérivées d'une fonction »

1. Définition du taux de variation

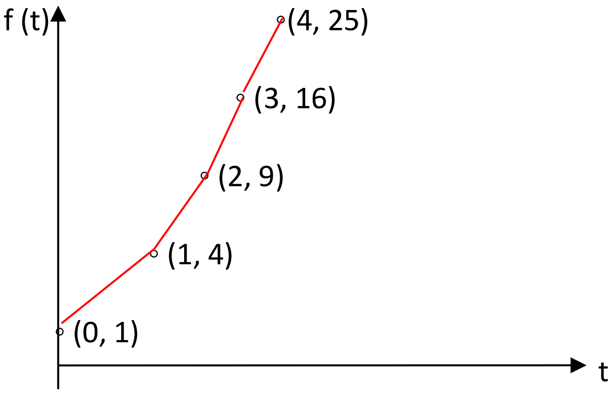
Considérons une bactérie dont la croissance est définie par la fonction suivante :
$f(t) = (t + 1)^2$

t : temps en minutes
f (t) : nombre de bactéries au temps t

À t = 0, le nombre de bactéries est : $f(0) = (0 + 1)^2 = 1$
À t = 1 mn, le nombre de bactéries est : $f(1) = (1 + 1)^2 = 4$

Pour les quatre premières minutes, on obtient :

t (mn)	f (t) (nbre de bactéries)
(0	1
1	4
2	9
3	16
4	25



On remarque que la croissance des bactéries est de plus en plus rapide. La population double, triple ou quadruple très rapidement. Soit :

- à t = 0 et t = 1, l'accroissement des bactéries est : 4 - 1 = 3
- de t = 1 à t = 3 , l'accroissement des bactéries est : 16 - 4 = 12
- de t = a à t = b , l'accroissement des bactéries est : f (a) - f (b)

Lorsqu'on étudie la croissance d'une fonction, on s'intéresse souvent à la vitesse à laquelle s'effectue cette croissance sur des intervalles donnés. En fait, on s'intéresse à ce qu'on appelle *« le taux de variation moyen de la fonction ».*

Pour l'exemple ci-dessus, le taux de variation moyen des bactéries par rapport au temps est :

- de t = 0 à t = 1 → $\frac{4-1}{1-0}$ = 3 bactéries/minute
- de t = 1 à t = 3 → $\frac{16-4}{3-1}$ = 6 bactéries/minute

Pour une fonction donnée f, le taux de variation moyen de cette fonction sur l'intervalle [a, b] de son domaine, est donnée par l'expression suivante :

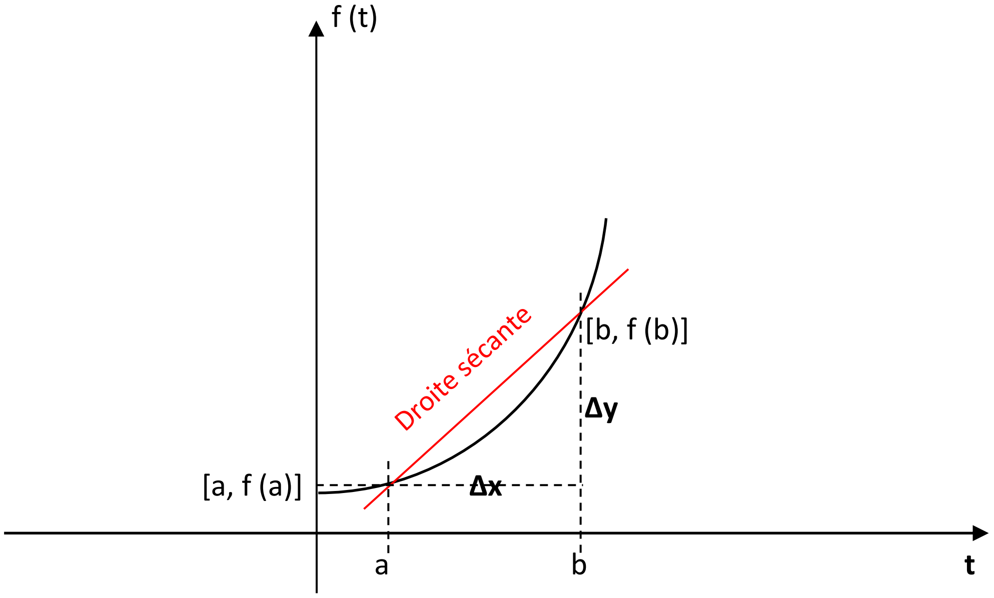
$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Géométriquement, lorsqu'on calcule le taux de variation moyen d'une fonction sur l'intervalle [a, b], cela revient à calculer *« une pente ».*

Le taux de variation moyen correspond donc à *la pente de la droite sécante* passant par les points [a, f (a)] et [b, f (b)]. Soit :

$$\boxed{\text{Taux de variation moyen} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

La figure ci-dessous illustre le taux de variation.



1) Peut-on obtenir le taux de croissance des bactéries à un moment précis, par exemple, à t = 4 mn ?
Il est possible d'approcher la valeur en question en considérant plusieurs taux de variation moyens. Pour ce faire, on procède comme ce qui suit :

- On commence d'abord à gauche, soit :

Sur [3 ; 4] → $\frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{25-16}{1} = 9$

Sur [3,5 ; 4] → $\frac{f(4)-f(3,5)}{4-3,5} = \frac{25-12,25}{4-3,5} = 9,5$

Sur [3,9 ; 4] → $\frac{f(4)-f(3,9)}{4-3,9} = \frac{25-24,01}{0,1} = 9,9$

Sur [3,99 ; 4] → $\frac{f(4)-f(3,99)}{4-3,99} = \frac{25-24,9001}{0,01} = 9,99$

Sur [3,999 ; 4] → $\frac{f(4)-f(3,999)}{4-3,999} = \frac{25-24,990001}{0,001} = 9,999$

- À droite :

Sur [4 ; 5] → $\frac{f(5)-f(4)}{5-4} = \frac{36-25}{1} = 11$

Sur [4 ; 4,5] → $\frac{f(4,5)-f(4)}{4,5-4} = \frac{30,25-25}{0,5} = 10,5$

Sur [4 ; 4,1] → $\frac{f(4,1)-f(4)}{4,1-4} = \frac{26,01-25}{0,1} = 10,1$

Sur [4 ; 4,01] → $\frac{f(4,01)-f(4)}{4,01-4} = \frac{25,1001-25}{0,01} = 10,01$

Sur [4 ; 4,001] → $\frac{f(4,001)-f(4)}{4,001-4} = \frac{25,010001-25}{0,001} = 10,001$

On constate qu'à la quatrième minute, le taux de croissance de la population de bactéries est très proche de 10 bactéries par minute.

2) Peut-on résoudre le problème sans l'utilisation de la calculatrice ?

La réponse est oui à condition d'utiliser *la notion de limite*. Pour cela, on opère comme ci-après :

- On considère l'intervalle de temps [4 ; t].
- On détermine le taux de variation moyen de la fonction sur cet intervalle, soit : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t)-f(4)}{t-4}$
- On évalue la limite lorsque t tend vers 4.
  $\lim_{t\to 4} \frac{f(t)-f(4)}{t-4} = \lim_{t\to 4} \frac{f(t)-f(4)}{t-4} = \lim_{t\to 4} \frac{(1+t)^2-25}{t-4} = \frac{0}{0} \rightarrow$ Indéterminée

Pour lever l'indétermination, il faut :

$$\lim_{t\to 4} \frac{f(t)-f(4)}{t-4} = \lim_{t\to 4} \frac{f(t)-f(4)}{t-4} = \lim_{t\to 4} \frac{(t^2+2t+1)-25}{t-4} = \lim_{t\to 4} \frac{(t+6)(t-4)}{t-4} = \lim_{t\to 4} (t+6) = 10$$

$$\boldsymbol{\lim_{t\to 4} \frac{f(t)-f(4)}{t-4} = \lim_{t\to 4} (t+6) = 10}$$

La valeur obtenue s'appelle le *taux de variation instantané* de la population des bactéries à la quatrième minute.

Remarque

Pour obtenir le taux de croissance des bactéries à la quatrième minute, on considère généralement deux intervalles :

- [4 ; t] avec t > 4 pour lequel le taux de variation moyen est égal à $\frac{f(t)-f(4)}{t-4}$ et ensuite évaluer :
  $$\lim_{t\to 4^+} \frac{f(t)-f(4)}{t-4}$$
- [t ; 4] avec t < 4 pour lequel le taux de variation moyen est $\frac{f(4)-f(t)}{4-t}$ et évaluer :
  $$\lim_{t\to 4^-} \frac{f(4)-f(t)}{4-t}$$

On remarque que cela est inutile pour la raison suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{t\to 4^+} \frac{f(t)-f(4)}{t-4} \\ \\ \lim_{t\to 4^-} \frac{f(4)-f(t)}{4-t} = \lim_{t\to 4^-} \frac{f(t)-f(4)}{t-4} \end{array}\right] = \lim_{t\to 4} \frac{f(t)-f(4)}{t-4}$$

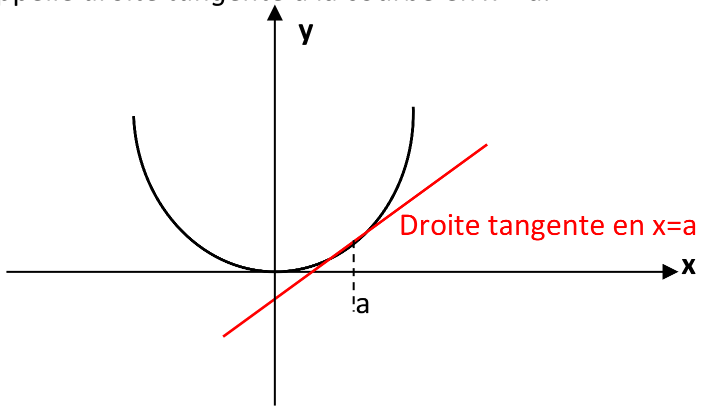
(En multipliant par -1 le numérateur et le dénominateur)

Le taux de variation instantané d'une fonction *f* pour x = a de son domaine est donné par :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{(lorsque cette limite existe dans R)}$$

Remarque

Généralement, pour parler de taux de variation instantané, on emploie simplement *taux de variation*. Géométriquement, lorsqu'on calcule le taux de variation d'une fonction en une valeur x = a, on calcule la pente d'une droite qu'on appelle *droite tangente* à la courbe en x = a.



Exercice

Calculer le taux de variation de la fonction f (x) = 1 - 3x^2 pour :

a) x = 1
b) x = 5
c) x = -2

Solution

a) Pour x = 1

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(1-3x^2)-(-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3-3x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3(1-x^2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{3(1-x)(1+x)}{x-1}$

$\lim_{x \to 1} \frac{3(1-x^2)}{x-1} = \lim_{x \to 1} -3(1+x) = -6$

$\mathbf{\lim_{x \to 1} \frac{3(1-x^2)}{x-1} = -6}$

b) Pour x = 5

$\lim_{x \to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{(1-3x^2)+74}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{(75-3x^2)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{3(25-x^2)}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{3(5-x)(5+x)}{x-5}$

$\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x-5} = \lim_{x \to 5} -3(5+x) = -30$

$\mathbf{\lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x-5} = -30}$

c) Pour x = -2

$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(1-3x^2)+11}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(12-3x^2)}{x+5} = \lim_{x \to -2} \frac{3(4-x^2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(2-x)(2+x)}{x+2}$

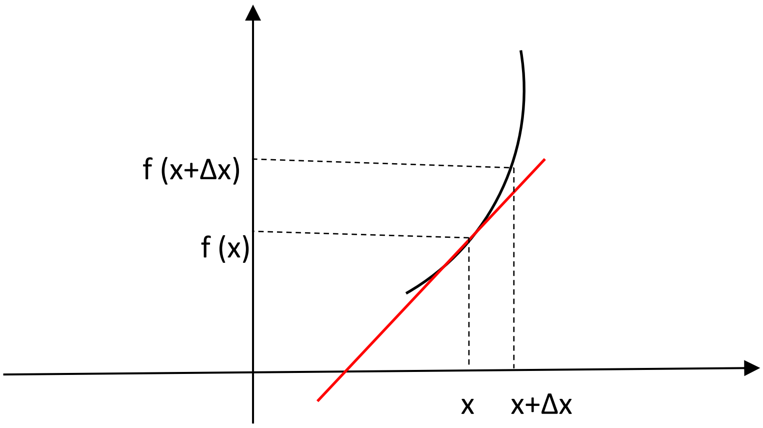
$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} 3(2-x) = 12$

$\mathbf{\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = 12}$

Remarque

Il existe une autre façon de calculer le taux de variation d'une fonction. Ce calcul se fait comme ci-après : Soit x une valeur quelconque du domaine de la fonction, et Δx un accroissement (positif ou négatif de x). Le taux de variation de la fonction *f* pour une valeur x de son domaine est donné par :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{(lorsque cette limite existe dans R)}$$



Cette nouvelle forme de calcul donne le taux de variation de la fonction (s'il existe) non pas pour une seule valeur mais pour toutes les valeurs de son domaine. Cela représente donc un grand avantage par rapport à la première forme. Pour mettre en évidence cet avantage, on reprend l'exercice précédent.

Exercice

Calculer le taux de variation de la fonction f (x) = 1 - 3x^2 en utilisant la deuxième forme.

Solution

Le comportement général du taux de variation est donné par l'expression :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[1-3(x+\Delta x)^2]-(1-3x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1-3x^2-6x\,\Delta x-3\Delta x^2 -1 +3x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-6x\,\Delta x-3\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x\,(-6x-3\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} -6x - 3\Delta x = -6x$$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -6x$

On remarque que le résultat obtenu est général. Le taux de variation est de :

Pour x = 1 → -6 (1) = -6

Pour x = 5 → -6 (5) = -30

Pour x = -2 → -6 (-2) = 12

2. Définition de la dérivée d'une fonction

La dérivée d'une fonction y = f (x) que l'on note $\frac{dy}{dx}$ est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{(si cette limite existe)}$$

Lorsque la limite existe, on dit que la fonction f(x) est dérivable en x. Si une fonction est dérivable pour toutes les de son domaine de définition, on dit simplement qu'elle est dérivable.

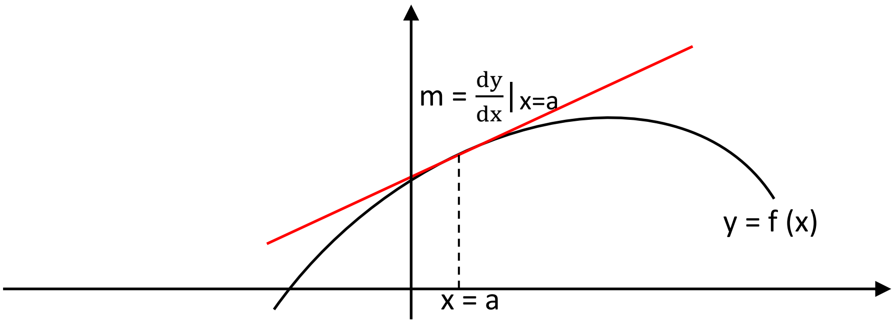
La dérivée d'une fonction y = f (x) pour x = a, notée $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$ est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \text{ si cette limite existe dans R}$$

Il y a d'autres notations pour designer la dérivée, comme, $y'|_{x=a}$ ou f'(a).

Remarques

1) En se référant au paragraphe précédent, on peut dire que la dérivée d'une fonction peut être interprétée comme le taux de variation instantané d'une fonction en une valeur donnée. Géométriquement, c'est *la pente de la droite tangente* à la courbe de la fonction en une valeur donnée.



2) $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}$ f(x) est aussi appelée la notation de Leibniz.

Exercices

1) Déterminer $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1}$ si $y = \sqrt{4-3x}$

Solution

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4-3x} - \sqrt{4-3}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4-3x} - 1}{x-1} = \frac{0}{0} \to \text{indéterminé}$$

Pour lever l'indétermination, on multiple par :

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4-3x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{4-3x}+1}{\sqrt{4-3x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(4-3x)-1}{(x-1)\sqrt{(4-3x)}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(3-3x)}{(x-1)\sqrt{(4-3x)}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3\,(1-x)}{(x-1)\sqrt{(4-3x)}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{-3}{\sqrt{(4-3x)}+1} = -\frac{3}{2}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = -\frac{3}{2}}$$

2) Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{x-1}{x+1}$

Solution

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)-1}{(x+\Delta x)+1} - \frac{(x-1)}{(x+1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x-1)(x+1)-(x-1)(x+\Delta x+1)}{\Delta x\,(x+\Delta x+1)(x+1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x-1)\,(x+1)-(x-1)(x+\Delta x+1)}{\Delta x\,(x+\Delta x+1)\,(x+1)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2 + x + x\Delta x + \Delta x - x - 1 - x^2 - x\Delta x - x + x + \Delta x + 1}{\Delta x\,(x+\Delta x+1)\,(x+1)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x\,(x+\Delta x+1)\,(x+1)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2}{(x+\Delta x+1)\,(x+1)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}}$$

3) Soit $y = 6 - x - x^2$

a) Trouver la pente de la droite tangente à la courbe lorsque x = -2.

b) Déterminer l'équation de la droite tangente pour cette valeur.

Solution

a) La pente de la droite tangente à la courbe lorsque x = -2 est donnée par :

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2} = \lim_{x\to -2} \frac{f\,(x) - f\,(-2)}{x-(-2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(6-x-x^2) - (6+2-4)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{2-x-x^2}{x+2} = \frac{0}{0} \quad \text{Indéterminé}$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\,(1-x)}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x-1) = 3$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2} = 3}$$

b) Equation de la tangente au point x = -2

La pente de la droite tangente à la courbe est égale à 3. L'équation de cette droite a pour expression :

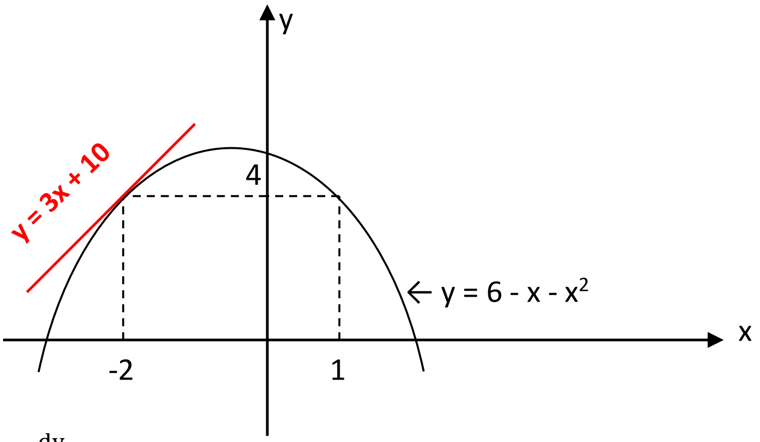
$$y = 3x + b$$

Etant donné que cette droite passe par le point (-2, 4), alors on peut écrire :

y = 3x + b → 4 = 3 (-2) + b → b = 10

L'équation de la droite tangente est donc :

y = 3x + 10



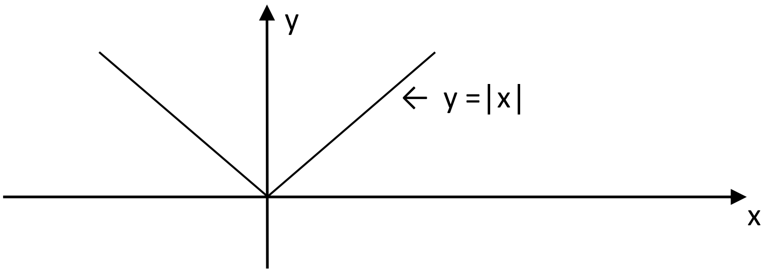
4) Soit $y = |x|$, trouver $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

Solution

$\frac{dy}{dx}\Big|x=0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{|x|} = \frac{0}{0}$ Indéterminé

$$\frac{dy}{dx}\Big|x=0 = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \\ \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} +1 = +1 \end{cases}$$

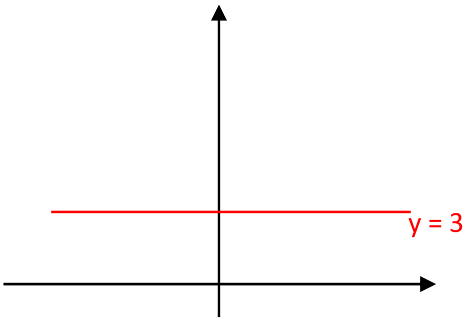
Par conséquent, $\frac{dy}{dx}\Big|x=0 \to \nexists$ (n'existe pas)



2.1. Règles de dérivation

Règle 1 : Dérivée d'une constante

$\frac{d\,(k)}{dx} = 0 \qquad (k \in \mathrm{R})$



Démonstration

$\frac{d\,(k)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{k-k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$

$\to \frac{d\,(3)}{dx} = 0 \qquad \frac{d\,(\sqrt{2})}{dt} = 0 \qquad \frac{d\,(\pi)}{dr} = 0$ → Le taux de croissance est nul lorsque la fonction est constante.

Règle 2 : Dérivée d'une puissance

$\frac{d\,x^n}{dx} = n\,x^{n-1} \qquad (n \in \mathrm{R})$

Démonstration

La démonstration suivante est faite pour le cas où *n* est un entier positif. Néanmoins, la règle est valable pour tout *n* appartenant à R.

Pour démontrer la règle 2, on utilise la factorisation du binôme, $a^n - b^n$. Ce qui donne :

$a^1 - b^1 = (a - b)$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$

$\qquad = (a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3)$

On nous basant sur ces résultats, on peut en déduire que :

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + ... + b^{n-1})$

À partir de cette expression, on peut démontrer la règle 2 comme ci-après :

$$\frac{d\,x^2}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[x+\Delta x-x][(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\,x+(x+\Delta x)^{n-3}\,x^2+\cdots.+x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x\,[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\,x+(x+\Delta x)^{n-3}\,x^2+\cdots.+x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} (x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}\,x + (x+\Delta x)^{n-3}\,x^2 + ...+ x^{n-1}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}\,x + x^{n-3}\,x^2 + \ldots\ldots + x^{n-1}$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots\ldots + x^{n-1}}_{\text{n fois } x^{n-1}} = n\,x^{n-1}$$

$$\mathbf{\frac{d\,x^n}{dx} = n\,x^{n-1}}$$

Exercices

1) Trouver $\frac{d\,y}{dx}$ pour $y = x^5$

$$\frac{dx^n}{dx} = n\,x^{n-1} \rightarrow \frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,x^5}{dx} = 5\,x^4$$

$$\mathbf{\frac{dx^5}{dx} = 5\,x^4}$$

2) $u = \sqrt{t}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d\,(\sqrt{t})}{dt} = \frac{dt^{1/2}}{dt} = \frac{1}{2}\,t^{1/2-1} = \frac{1}{2}\,t^{-1/2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\mathbf{\frac{d\,u}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}}$$

3) $r = \frac{1}{s^2} \rightarrow \frac{dr}{ds} = \frac{d\,(1/s^2)}{ds} = \frac{d\,(s^{-2})}{ds} = -2\,s^{-3} = \frac{-2}{s^3}$

$$\mathbf{\frac{dr}{ds} = \frac{-2}{s^3}}$$

4) $v = \frac{1}{\sqrt{u^3}} \rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{u^3}}\right) = \frac{d\,(u^{-\frac{3}{2}})}{du} = -\,\frac{3}{2}\,u^{-5/2} = -\,\frac{3}{2\sqrt{u^5}} = -\,\frac{3}{2u^2\sqrt{u}}$

$$\mathbf{\frac{dv}{du} = -\,\frac{3}{2u^2\sqrt{u}}}$$

Règle 3 : Dérivée du produit d’une constante par une fonction

$$\frac{d}{dx}\,k\,g(x) = k\,\frac{d}{dx}\,g(x) \quad (k \in \mathrm{R})$$

Démonstration

$$\frac{d}{dx}\,k\,g(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x+\Delta x) - f\,(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{kg\,(x+\Delta x) - kg\,(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\,[\,g\,(x+\Delta x) - g\,(x)]}{\Delta x} = k\,\frac{d}{dx}\,g(x)$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\,k\,g(x) = k\,\frac{d}{dx}\,g(x)}$$

Exercices

1) Trouver $\frac{d\,y}{dx}$ pour $y = \frac{8}{x}$

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{8}{x}\right) = 8\,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = 8\,\frac{d}{dx}\,(x^{-1}) = 8\,(-x^{-2}) = -\,\frac{8}{x^2}$$

$$\mathbf{\frac{d\,y}{dx} = -\,\frac{8}{x^2}}$$

2) Trouver $\frac{d}{dr}\,(\pi r^2)$

$$\frac{d}{dr}\,(\pi r^2) = \pi\,\frac{dr^2}{dr} = \pi\,(2r) = 2\pi r$$

$$\mathbf{\frac{d}{dr}\,(\pi r^2) = 2\pi r}$$

Règle 4 : Dérivée d’une somme de fonctions

$$\frac{d}{dx}\,[g(x) \pm h(x)] = \frac{d}{dx}\,g(x) \pm \frac{d}{dx}\,h(x)$$

Démonstration

$$\frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x)+h(x+\Delta x)]-[g(x)+h(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]+[h(x+\Delta x)-h(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[g(x+\Delta x)-g(x)]}{\Delta x} + \frac{[h(x+\Delta x)-h(x)]}{\Delta x}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{d}{dx} g(x) \pm \frac{d}{dx} h(x)}$$

Exercice

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = \frac{3x-2\sqrt{x}}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-2\sqrt{x}}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(3x^{-1} - 2x^{-3/2}) = \frac{d}{dx}(3x^{-1}) - \frac{d}{dx}(2x^{-3/2}) = 3\frac{d}{dx}(x^{-1}) - 2\frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = 3(-x^{-2}) - 2(-3/2\, x^{-5/2})$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2\sqrt{x}} = -3\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^2\sqrt{x}}\right)$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-2\sqrt{x}}{x^2}\right) = -3\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x^2\sqrt{x}}\right)}$$

Règle 5 : Dérivée d'un produit de fonctions

$$\frac{d}{dx}[g(x) . h(x)] = h(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}h(x)$$

Exemples

1) $\frac{d}{dx}(2x - 1)(x^2 + 1) = (x^2 + 1)\frac{d}{dx}(2x - 1) + (2x - 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(2) + (2x - 1)(2x)$

$= 2x^2 + 2 + 4x^2 - 2x = 6x^2 - 2x + 2$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(2x - 1)(x^2 + 1) = 6x^2 - 2x + 2}$$

2) Comment obtenir de façon simple la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{3x+1}{x}$?

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(3) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(3) + \frac{d}{dx}(x^{-1}) = 0 - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}}$$

À partir de cet exemple, on en déduit que :

$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x+1}{x}\right) \neq \frac{\frac{d}{dx}(3x+1)}{\frac{d}{dx}(x)}$ → La dérivée d'un quotient n'est pas égale au quotient des dérivées.

Règle 6 : Dérivée d'un quotient fonctions

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h(x)\frac{d}{dx}g(x) - g(x)\frac{d}{dx}h(x)}{[h(x)]^2}$$

Démonstration

Pour cette démonstration, on peut utiliser la règle de dérivation d'un produit à la place de la définition de la dérivée comme cela été fait pour les démonstrations précédentes. Pour ce faire, on pose : $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, puis, on cherche $\frac{d}{dx} f(x)$, si cette dérivée existe.

On a :

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow g(x) = f(x)\, h(x) \rightarrow \frac{d}{dx}g(x) = h(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}h(x)$

En isolant $\frac{d}{dx}f(x)$, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\,f(x) = \frac{\frac{d}{dx}\,g(x) - f(x)\,\frac{d}{dx}\,h(x)}{h(x)}$$

Or, f(x) = $\frac{g\,(x)}{h\,(x)}$, alors :

$$\frac{d}{dx}\,f(x) = \frac{\frac{d}{dx}\,g(x) - [\frac{g(x)}{h(x)}\;\frac{dh(x)}{dx}]}{h(x)} = \frac{h(x)\,\frac{d}{dx}\,g(x) - g(x)\,\frac{dh(x)}{dx}}{h(x)^2}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\,f(x) = \frac{h(x)\,\frac{d}{dx}\,g(x) - g(x)\,\frac{dh(x)}{dx}}{h(x)^2}}$$

Exemple

$$\frac{d}{dx}\,[\frac{1-2x}{5x+1}] = \frac{(5x+1)\,\frac{d\,(1-2x)}{dx} - (1-2x)\,\frac{d\,(5x+1)}{dx}}{(5x+1)^2} = \frac{(5x+1)\,(-2) - (1-2x)\,(5)}{(5x+1)^2} = \frac{-7}{(5x+1)^2}$$

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\,[\frac{1-2x}{5x+1}] = \frac{-7}{(5x+1)^2}}$$

Règle 7 : Règle de dérivation en chaine

Soit y = g [h(x)], où : y = g(u) et u = h(x). Alors :

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du}\,.\,\frac{d\,u}{dx}$$

Démonstration

Par définition, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta u}\,.\,\frac{\Delta u}{\Delta x})$

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du}\,.\,\frac{d\,u}{dx} \rightarrow \frac{d\,y}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\,.\,\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

On a :

Δy = g [h(x + Δx)] - g(x)

Δu = h (x + Δx) - h (x)

La limite d'un produit est égale au produit des limites. Lorsque Δx → 0, Δu = h (x + Δx) - h(x) → 0

$$\mathbf{\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du}\,.\,\frac{d\,u}{dx}}$$

Exercices

1) En utilisant la règle 7, trouver $\frac{d}{dx}(2x - 1)^2$

$$y = (2x - 1)^2 \begin{cases} y = u^2 \\ u = 2x - 1 \end{cases}$$

En utilisant la règle de dérivation en chaine, on obtient :

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du}\,.\,\frac{d\,u}{dx} \rightarrow \frac{d\,y}{dx} = \frac{du^2}{du}\,.\,\frac{d\,(2x-1)}{dx} = (2u)\,(2) = 4\,(2x - 1)$$

$$\mathbf{\frac{d\,y}{dx} = 4\,(2x - 1)}$$

2) Calculer $\frac{d}{dx}\sqrt{5 - 3x^2}$

$$y = \sqrt{5 - 3x^2} \begin{cases} y = \sqrt{u} \\ u = 5 - 3x^2 \end{cases}$$

À l'aide de la règle de dérivation en chaine, on peut écrire :

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du} . \frac{d\,u}{dx} \rightarrow \frac{d\,y}{dx} = \frac{d\sqrt{u}}{du} . \frac{d\,(5-3x^2)}{dx} = \frac{du^{1/2}}{du} . \frac{d\,(5-3x^2)}{dx} = (\frac{1}{2}\,u^{-1/2})\,(-6x) = (\frac{1}{2\sqrt{u}})\,(-6x) = -\,\frac{3x}{\sqrt{5-3x^2}}$$

$\frac{d\,y}{dx} = -\,\frac{3x}{\sqrt{5-3x^2}}$

Remarque

La règle 7 peut être généralisée à plusieurs fonctions. À titre d’exemple, la fonction y définies par y = f [g (h(x))] peut être décomposée ainsi :

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du} . \frac{d\,u}{dv} . \frac{d\,v}{dx}$$

Exemple

Calculer $\frac{d}{dx}\,(2 + \sqrt{4-3x}\,)^5$

$$y = 2 + (2 + \sqrt{4-3x})^5 \rightarrow \begin{cases} y = u^5 \\ u = 2 + \sqrt{v} \\ v = 4 - 3x \end{cases}$$

En utilisant la règle de dérivation en chaine, on aboutit à :

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du} . \frac{d\,u}{dv} . \frac{d\,v}{dx} = \frac{d\,u^5}{du} . \frac{d\,(2+\sqrt{v})}{dv} . \frac{d\,(4-3x)}{dx} = (5u^4)\,(\frac{1}{2\sqrt{v}})\,(-3) = 5\,(2 + \sqrt{v})^4\,(\frac{1}{2\sqrt{4-3x}})\,(-3)$$

$$= 5\,(2 + \sqrt{4-3x})^4\,(\frac{1}{2\sqrt{4-3x}})\,(-3) = (\frac{-15\,(2+\sqrt{4-3x})^4}{2\sqrt{4-3x}})$$

$\frac{d\,y}{dx} = (\frac{-15\,(2+\sqrt{4-3x})^4}{2\sqrt{4-3x}})$

Règle 8 : Règle de dérivation d’une puissance de fonction

$$\frac{d\,[g(x)]^n}{dx} = n\,[g(x)]^{\,n-1}\,\frac{d}{dx}\,g(x) \qquad (n \in R)$$

Démonstration

$[g(x)]^{\,n-1}$ est le résultat de la composition de : $\begin{cases} y = u^n \\ u = g(x) \end{cases}$

En utilisant la règle de dérivation en chaine, on a :

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{du} . \frac{d\,u}{dx} = \frac{d\,(u^n)}{du} . \frac{d\,g(x)}{dx} = (nu^{n-1})\,\frac{d\,g(x)}{dx} = n\,[g(x)]^{n-1}\,\frac{d\,g(x)}{dx}$$

$$\frac{d\,y}{dx} = n\,[g(x)]^{n-1}\,\frac{d\,g(x)}{dx}$$

Exercices

1) Trouver $\frac{d}{dx}\,(3 - 2x^5\,)^4 = 4\,(3 - 2x^5\,)^3\,(-10x^4) = -\,40x^4\,(3 - 2x^5)^3$

$\frac{d}{dx}\,(3 - 2x^5\,)^4 = -\,40x^4\,(3 - 2x^5)^3$

2) Trouver $\frac{d}{dx}\,[(x - 1)^2\,(x + 2)^3]$

$$\frac{d}{dx}\,[(x - 1)^2\,(x + 2)^3] = (x + 2)^3\,\frac{d}{dx}\,(x - 1)^2 + (x - 1)^2\,\frac{d}{dx}\,(x + 2)^3 = (x + 2)^3.\ 2\,(x - 1)\,(1) + (x - 1)^2 .\ 3\,(x + 2)^2\,(1)$$

$$= 2\,(x + 2)^3\,(x - 1) + 3\,(x - 1)^2\,(x + 2)^2 = (x + 2)^2\,(x - 1)\,[3\,(x - 1) + 2\,(x + 2)]$$

$$= (x + 2)^2\,(x - 1)\,(5x + 1)$$

$\frac{d}{dx}\,[(x - 1)^2\,(x + 2)^3] = (x + 2)^2\,(x - 1)\,(5x + 1)$

3) Trouver $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}})$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}}) = \frac{\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}}{(\sqrt{2-3\mathrm{t}^2})^2} - \frac{\mathrm{t}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dt}}\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}}{(\sqrt{2-3\mathrm{t}^2})^2} = \frac{\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}-\mathrm{t}\left(\frac{1}{2\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}}\right)(-6\mathrm{t})}{2-3\mathrm{t}^2} = (\frac{(2-3t^2)+3\mathrm{t}^2}{\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}})(\frac{1}{(2-3\mathrm{t}^2}) = \frac{2}{(2-3\mathrm{t}^2)(\sqrt{2-3\mathrm{t}^2})}$$

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{\mathrm{t}}{\sqrt{2-3\mathrm{t}^2}}) = \frac{2}{(2-3\mathrm{t}^2)(\sqrt{2-3\mathrm{t}^2})}}$$

4) Trouver $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\sqrt{\frac{2-3s}{2+3s}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\sqrt{\frac{2-3s}{2+3s}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(\frac{2-3\mathrm{s}}{2+3\mathrm{s}})^{1/2} = \frac{1}{2}(\frac{2-3\mathrm{s}}{2+3\mathrm{s}})^{-1/2}.\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(\frac{2-3\mathrm{s}}{2+3\mathrm{s}}) = \frac{(2+3\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(2-3\mathrm{s})-(2-3\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(2+3\mathrm{s})}{(2+3\mathrm{s})^2} = \frac{(2+3\mathrm{s})\ (-3)-(2-3\mathrm{s})\ (3)}{(2+3\mathrm{s})^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(\frac{2-3\mathrm{s}}{2+3\mathrm{s}}) = \frac{(2+3\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(2-3\mathrm{s})-(2-3\mathrm{s})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}(2+3\mathrm{s})}{(2+3\mathrm{s})^2} = \frac{(2+3\mathrm{s})\ (-3)-(2-3\mathrm{s})\ (3)}{(2+3\mathrm{s})^2} = \frac{-12}{(2+3\mathrm{s})^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\sqrt{\frac{2-3s}{2+3s}} = \frac{1}{2}(\frac{2-3\mathrm{s}}{2+3\mathrm{s}})^{-1/2}.\ (\frac{-12}{(2+3\mathrm{s})^2}) = \frac{-6}{(2+3\mathrm{s})^2}\sqrt{\frac{2+3s}{2-3s}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\sqrt{\frac{2-3\mathrm{s}}{2+3\mathrm{s}}} = \frac{-6}{(2+3\mathrm{s})^2}\sqrt{\frac{2+3\mathrm{s}}{2-3\mathrm{s}}}}$$

2.2. Dérivées d'ordre supérieur

Si y = f (x) est une fonction dérivable, alors sa dérivée est aussi une fonction. Cette fonction peut donc être dérivable. La dérivée de f (x) lorsqu'elle existe s'appelle « dérivée seconde ou dérivée d'ordre 2 de f (x) ». Si on dérive à nouveau, on obtient la dérivée troisième ou dérivée d'ordre 3 de f (x).

Plusieurs notations existent pour designer l'ordre d'une dérivée. Elles se trouvent dans le tableau suivant :

Dérivée d'ordre	Notations
1	$\frac{\mathrm{d\,y}}{\mathrm{dx}}$ = y' $\frac{\mathrm{d\,f(x)}}{\mathrm{dx}}$ = f'(x)
2	$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}$ = y'' $\frac{\mathrm{d^2f(x)}}{\mathrm{dx^2}}$ = f''(x)
3	$\frac{\mathrm{d^3y}}{\mathrm{dx^3}}$ = y''' $\frac{\mathrm{d^3f(x)}}{\mathrm{dx^3}}$ = f'''(x)
4	$\frac{\mathrm{d^4y}}{\mathrm{dx^4}}$ = y'''' $\frac{\mathrm{d^4f(x)}}{\mathrm{dx^4}}$ = f''''(x)
.	
.	
n	$\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{y}}{\mathrm{dx}^n}$ = y^{n} $\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{f(x)}}{\mathrm{dx}^n}$ = f^{n}(x

Exemples

1) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 5$

$\frac{\mathrm{d\,y}}{\mathrm{dx}} = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 7$

$\frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}} = 12x^2 - 12x + 6$

$\frac{\mathrm{d^3y}}{\mathrm{dx^3}} = 24x - 12$

$\frac{\mathrm{d^4y}}{\mathrm{dx^4}} = 24$

$\frac{\mathrm{d^5y}}{\mathrm{dx^5}} = 0$

2) $\frac{d^4}{du^4}(\frac{2}{u^3})$

$\frac{d}{du}(2u^{-3}) = -6u^{-4}$
$\frac{d}{du}(-2u^{-4}) = 24u^{-5}$
$\frac{d}{du}(24u^{-5}) = -120u^{-6}$
$\frac{d}{du}(-120u^{-6}) = 720u^{-7} = \frac{720}{u^7}$

$\mathbf{\frac{d^4}{du^4}(\frac{2}{u^3}) = \frac{720}{u^7}}$

3) Trouver f'''(3) si $f(x) = \frac{2x^2-3}{5x} = \frac{2x}{5} - \frac{3}{5x}$

$f(x) = [\frac{2x}{5} - \frac{3}{5x}] = [\frac{2x}{5} - \frac{3}{5}x^{-1}] \rightarrow f'(x) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}x^{-2} \rightarrow f''(x) = -\frac{6}{5}x^{-3} \rightarrow f'''(x) = \frac{18}{5}x^{-4} = \frac{18}{5x^4} \rightarrow f'''(3) = \frac{2}{45}$

$\mathbf{f'''(x) = \frac{18}{5x^4} \rightarrow f'''(3) = \frac{2}{45}}$

2.3. Dérivées implicites et dérivées des fonctions réciproques

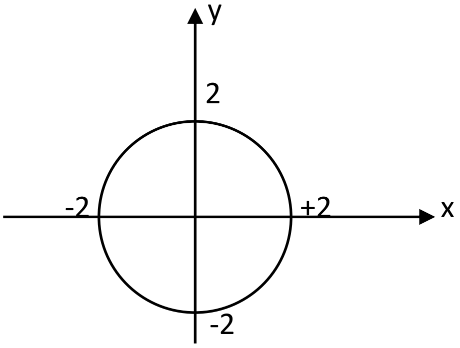
2.3.1. Définition

1) Une fonction est sous « forme explicite » lorsqu'elle est définie à l'aide d'une équation du type y = f(x), comme par exemple, $y = \sqrt{x-1}$.

2) Une fonction est sous forme « implicite » lorsqu'elle est définie à l'aide d'une équation de type f(x,y) = 0, comme par exemple, $y = \frac{x^4-3x+1}{y}$, $x = 3x^2 - y^2 + 1$

Une équation peut définir implicitement plus d'une fonction comme elle peut ne pas en définir. À titre d'exemple, l'équation du cercle de rayon égal à 2 centré à l'origine, $x^2 + y^2 = 4$, définit implicitement les deux fonctions (demi-cercle) d'équations :

$y = \pm\sqrt{4-x^2}$



Par contre, l'équation $x^2 + y^2 = -1$, ne définit implicitement aucune fonction. Cela veut dire, il n'y a pas de valeur de x et de y pouvant vérifier cette équation. En revanche, l'équation $y^3 - 2xy - 3y^2 = 1$, définit peut-être implicitement une ou plusieurs fonctions. Mais, malheureusement, il est difficile de les expliciter même si on est sûr de leurs existences. Cependant, il est possible d'obtenir la dérivée d'une telle fonction en utilisant une « technique de dérivation implicite ».

2.3.2. Technique de dérivation implicite

Pour cette technique, on procède comme ci-après :

1) On suppose d'abord qu'il existe au moins une fonction dérivable qui vérifie l'équation.
2) On dérive ensuite les deux membres de l'équation.
3) Ensuite, on dérive par rapport à la dérivée cherchée.

Exemples

1) Trouver $\frac{d\,y}{dx}$ si $y^3 - 2xy - 3x^2 = 1$

On dérive les deux membres de l'équation en supposant que y est une fonction de x.

$$\frac{d}{dx}(y^3 - 2xy - 3x^2) = \frac{d}{dx}(1) \rightarrow 3y^2\frac{d\,y}{dx} - [2y + 2x\frac{d\,y}{dx}] - 6x = 0$$
$$= 3y^2\frac{d\,y}{dx} - 2y - 2x\frac{d\,y}{dx} - 6x = 0$$
$$= 3y^2\frac{d\,y}{dx} - 2x\frac{d\,y}{dx} = 2y + 6x$$
$$= (3y^2 - 2x)\frac{d\,y}{dx} = 2\,(y + 3x) \rightarrow \frac{d\,y}{dx} = \frac{2\,(y+3x)}{3y^2-2x}$$

$$\boldsymbol{\frac{d\,y}{dx} = \frac{2\,(y+3x)}{3y^2-2x}}$$

On constate que la dérivée obtenue est différente de celles habituellement rencontrées. En effet, elle contient deux variables : x et y.

Pour calculer un taux de variation à partir d'une dérivée obtenue implicitement, on doit en général fournir l'abscise et l'ordonnée du point. Par exemple :

$$\frac{d\,y}{dx}\Big|_{(0,1)} = \frac{2\,(y+3x)}{3y^2-2x} = \frac{2}{3}$$

2) Trouver par dérivation implicite $\frac{d\,y}{dx}\big|_{x=0}$ si $(xy - y^3) = (8 + 3x)$

On dérive les deux membres de l'équation en supposant que y est une fonction de x.

$$\frac{d}{dx}(xy - y^3) = \frac{d}{dx}(8 + 3x) \rightarrow \frac{d\,xy}{dx} - \frac{d\,y^3}{dx} = \frac{d}{dx}(8) + \frac{d}{dx}(3x) = y\frac{d\,x}{dx} + x\frac{d\,y}{dx} - 3y^2\frac{d\,y}{dx} = 3$$
$$(x - 3y^2)\frac{d\,y}{dx} = 3 - y \rightarrow x\frac{d\,y}{dx} - 3y^2\frac{d\,y}{dx} = 3 - y \rightarrow (x - 3y^2)\frac{d\,y}{dx} = 3 - y \rightarrow \frac{d\,y}{dx} = \frac{3-y}{x-3\,y^2}$$
$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{3-y}{x-3\,y^2}$$

Par conséquent :

$$\frac{d\,y}{dx}\Big|_{(0,-2)} = \frac{3-y}{x-3\,y^2} = \frac{3+2}{x-3\,(-2)^2} = -\frac{5}{12}$$

$$\boldsymbol{\frac{d\,y}{dx}\Big|_{(0,-2)} = \frac{3-y}{x-3\,y^2} = -\frac{5}{12}}$$

Etant donné que $(xy - y^3) = (8 + 3x)$, alors pour $x = 0$, $y^3 = -8 \rightarrow y = -2$.

Remarques

1) Dans la technique de dérivation implicite, on obtient « une seule réponse » même lorsque l'équation f(x,y) = 0 définit implicitement plus d'une fonction. Comment interpréter ce résultat ?

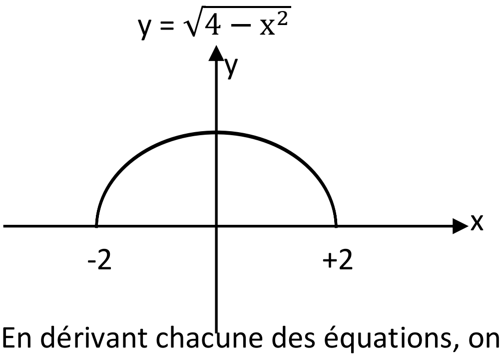
Pour répondre à cette question, on reprend l'équation précédente du cercle ($x^2+y^2=4$) puis on calcule $\frac{d\,y}{dx}$ implicitement. Cela donne :

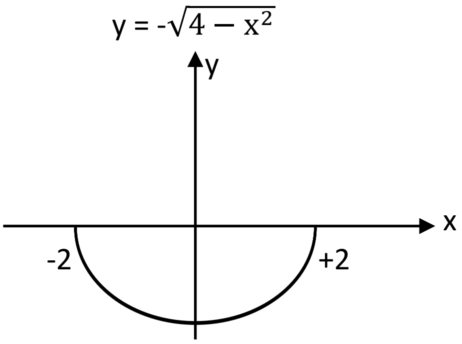
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4) \rightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 0 \rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow y\frac{dy}{dx} = -x$$

Et, on obtient :

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}$$

Or, l'équation, $x^2 + y^2 = 4$, définit implicitement deux fonctions d'équation : $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$





En dérivant chacune des équations, on obtient :

$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(4-x^2)^{1/2}}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{y}$ (car $y = \sqrt{4-x^2}$)

$\mathbf{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,[-(4-x^2)]^{1/2}}{dx} = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{x}{-y}$ (car $y = -\sqrt{4-x^2}$)

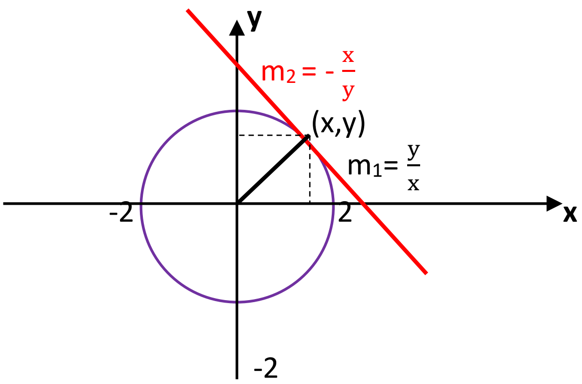
$\mathbf{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}$

Par conséquent, on retrouve la même dérivée dans les deux cas, celle obtenue implicitement ($-\frac{x}{y}$). Donc, une seule réponse même lorsque l'équation f(x,y)= 0 définit implicitement plus d'une fonction.

2) Si on peut passer à la forme explicite, il est préférable de le faire. Néanmoins, dans certains cas**,** la forme implicite est, soit plus facile à dériver, soit elle met en évidence les relations entre les variables x et y qui ne peuvent être obtenues autrement.

À titre d'exemple, la dérivée obtenue implicitement à partir de l'équation, $x^2 + y^2 = 4$, permet d'affirmer que « toute tangente au cercle est toujours perpendiculaire au rayon ». En effet, le produit de la pente des tangentes par la pente des rayons est toujours égal à -1*****.

$\mathbf{m_1 \cdot m_2 = (\frac{y}{x})\,(-\frac{x}{y}) = -1}$



(*) Rappel

Deux droites sont perpendiculaires si le produit de leur pente est égal à -1.

Règle 9

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ (si $\frac{dx}{dy}$ existe et différente de zéro)

Démonstration

Par définition, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}\right) = \frac{\lim \Delta x\to 0\,(1)}{\lim \Delta x\to 0\,(\frac{\Delta x}{\Delta y})}$$

Lorsque $\Delta x \to 0$, on a $\Delta y \to 0$ car $\frac{dx}{dy}$ existe et n'est pas nulle.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2.3.3. Dérivées des fonctions réciproques

Soient x = g(y) et y = f(x) des fonctions réciproques. Si on veut chercher $\frac{dy}{dx}$, la règle 9 permet d'obtenir une réponse rapide. À titre d'exemple, si $x = 5 - y^3 + 2y^4$, on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{d\,(5 - y^3 + 2y^4)}{dy}} = \frac{1}{-3y^2 + 8y^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-3y^2 + 8y^3}$$

Exercices

1) Soit l'équation $x = y^2 - 2y + 3$. Démontrer que la tangente à cette courbe au point (3,2) est perpendiculaire à la droite $y = 1 - 2x$

Pour que deux droites soient perpendiculaires, il faut que le produit de leur pente soit égal à -1. Comme la pente de la droite $y = 1 - 2x$ est égale à -2, il suffit donc que la pente de la droite tangente à cette courbe au point (3,2) soit égale à $+\frac{1}{2}$.

Soit :

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ au point (3,2)

En utilisant la règle 9, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\,(y^2-2y+3)}{dy}} = \frac{1}{2y-2} \rightarrow \frac{dy}{dx}\Big|_{(x=3,\ y=2)} = \frac{1}{2y-2} = \frac{1}{2\,(2)-2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}}$$

2) Chercher $\frac{dy}{dx}\Big|_{t=1}$ si $x = t - t^2$ et $y = t - t^3$

En utilisant la règle de dérivation en chaine, on obtient :

$$\frac{d\,y}{dx} = \frac{d\,y}{dt} \cdot \frac{d\,t}{dx} = \frac{d\,y}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = (1 - 3t^2) \text{ x } \frac{1}{(1-2t)} = \frac{1-3t^2}{1-2t} = \frac{1-3(1)}{1-2(1)} = \frac{1-3}{1-2} = 2$$

$$\mathbf{\frac{d\,y}{dx}\Big|_{t=1} = 2}$$