

# **DYNAMIQUE DES STRUCTURES**

**Destinée aux étudiants en Génie Civil**

*Nadjia MIHOUBI BAOUCHE*

# CHAPITRE I : NOTIONS PRELIMINAIRES DE LA DYNAMIQUE DES STRUCTURES

- 1. Pourquoi un calcul dynamique ?**
  - 1.1. Différences entre charge statique et charge**
  - 1.2. Exemples de comportement dynamique**
  - 1.3. Degré de liberté dynamique**
  - 1.4. Deuxième loi de Newton**
  - 1.5. Modélisation en masses concentrées**
- 2. Quelles sont les principales étapes d'une analyse dynamique ?**
- 3. Analyse dynamique d'une structure simple à un degré de liberté**
  - 3.1. Modèle mathématique**
  - 3.2. Equations du mouvement**
    - 3.2.1. Chargement dynamique quelconque**
    - 3.2.2. Excitation à la base : cas du séisme**
- 4. Résolution de l'équation fondamentale de l'analyse dynamique d'un système à un degré de liberté**
  - 4.1. Oscillation libre**
  - 4.2. Oscillation amortie**
    - 4.2.1. Système sur amorti ( $\xi > 1$ ) ou ( $\xi > 2m\omega$ )**
    - 4.2.2. Système à amortissement critique ( $\xi = 1$ ) ou ( $\xi = 2m\omega$ )**
    - 4.2.3. Système sous-amorti ou sous-critique ( $\xi < 1$ ) ou ( $\xi < 2m\omega$ )**
  - 4.3. Décrément logarithmique**
  - 4.4. Applications**
    - 4.4.1. Fréquences naturelles d'un bâtiment**
    - 4.4.2. Essais en oscillation libre d'un bâtiment à un seul niveau**
- 5. Equation fondamentale d'une oscillation forcée**
  - 5.1. Oscillation sous charge de courte durée**
  - 5.2. Oscillation sous charge dynamique quelconque : intégrale de Duhamel**

# CHAPITRE I : NOTIONS PRELIMINAIRES DE LA DYNAMIQUE DES STRUCTURES

## 1. Pourquoi un calcul dynamique ?

Pour décrire d'une façon proche de la réalité le comportement d'une structure soumise aux séismes, on fait appel à la dynamique des structures.

L'ingénieur en structures est généralement habitué à analyser les structures soumises à un seul chargement statique. Par conséquent, une seule solution constante dans le temps. L'analyse dynamique, contrairement à l'analyse statique, génère des solutions variables dans le temps. L'ingénieur doit donc essayer de prévoir le comportement dynamique des structures de manière à pouvoir les dimensionner convenablement, ou de manière à les modifier si une fois construites, elles présentent des caractéristiques dynamiques gênantes.

Le but premier de la dynamique des structures, c'est donc déterminer les variations dans le temps des contraintes et des déformations engendrées par un chargement dynamique quelconque. Dans cette optique, l'analyse statique représente un cas particulier de l'analyse dynamique.

Pratiquement, toutes les structures sont soumises à des charges dynamiques pendant leur durée de vie.

### 1.1. Différences entre charge statique et charge dynamique

Une charge statique est une charge dont l'amplitude, la direction et le point d'application ne varient pas avec le temps, c'est-à-dire, que l'on ne tient pas compte des effets de l'inertie (masse x accélération). En général, on considère comme charges statiques, l'ensemble des sollicitations (charges permanentes, surcharges d'exploitation) qui s'exercent sur une structure de génie civil, y compris les charges sismiques.

Une charge dynamique est une charge dont l'amplitude, la direction, ou le point d'application varient avec le temps. Cela peut donc engendrer des forces d'inertie (produit de la masse par l'accélération). Ces dernières jouent un rôle significatif dans la réponse des structures.

On distingue deux types de charges dynamiques :

- les charges aléatoires,
- les charges déterministes.

#### 1) Charges aléatoires

Ce sont des charges décrites de façon statistiques (moyenne, écart type, contenu fréquentiel, etc.). À titre d'exemple :

- des vibrations sur une piste de dance,
- des séismes futurs,
- des pressions du vent sur un bâtiment.

#### 2) Charges déterministes

Ce sont des charges dont l'amplitude, la direction et le point d'application sont connus à tout instant. Il existe deux types de charges déterministes : les charges périodiques, et les charges non périodiques.

Ce chapitre sera consacré exclusivement à l'analyse des structures soumises à des charges déterministes (périodiques ou non).

## 1.2. Exemples de comportement dynamique

On peut citer comme comportement dynamique :

- Comportement des structures soumises à des chocs (crash automobile, chute d'emballage de transport, impact d'avion).
- Mouvement causé par un séisme ou une explosion.
- Vibrations induites par un écoulement (pont soumis au vent, tuyaux d'un circuit industriel sous écoulement interne, ...), une machine tournante (turbines, réacteurs, ...) ou un contact (contact roue-chaussée, frottement des freins à disque, ...).

## 1.3. Degré de liberté dynamique

Le degré de liberté est la possibilité pour un système donné de subir une translation ou une rotation. En principe, un corps (ou une masse) a six (06) degrés de liberté : translation dans les 3 plans et rotation dans les 3 plans. S'agissant d'une structure, la nature des éléments et de leurs liaisons va conditionner la pertinence des degrés de liberté pris en considération pour la modélisation.

Le nombre de degré de liberté exprime le plus petit nombre de coordonnées nécessaires pour définir la position de toutes les particules de masse du système. Dans la plupart des cas, plusieurs composantes du mouvement sont négligeables les unes par rapport aux autres, de sorte qu'on puisse modéliser une structure, en apparence compliquée, avec seulement quelques degrés de liberté.

À titre d'exemple, considérons le pendule ci-dessous (Fig.1p). Il est constitué d'une balle métallique suspendue à une rotule à l'aide d'une barre.

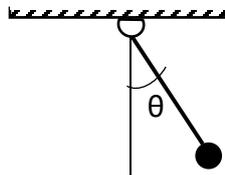


Figure 1p : Système dynamique : le pendule

D'une façon générale, ce système possède un nombre infini de degrés liberté (DDL) compte tenu de toutes les déformations possibles de la barre et de la balle. Mais, si on considère les faits suivants :

- la barre est beaucoup plus légère que la balle (masse négligeable),
- les déformations planes de la balle sont très faibles par rapport à son mouvement de corps rigide,
- les dimensions de la balle sont faibles par rapport au mouvement de corps rigide.

Alors, ce système peut être réduit à un seul degré de liberté (DDL) : c'est la rotation de la barre par rapport à l'appui (la rotule).

Si on considère maintenant une structure dynamique un peu plus complexe, comme par exemple un portique simple soumis à une charge latérale (Fig.2p).

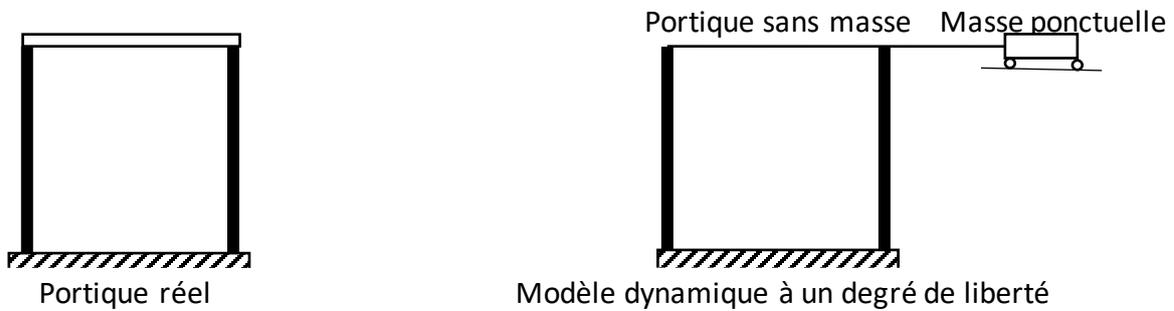


Figure 2p : Système à un degré de liberté

Ce système, comme précédemment, possède un nombre infini de DDL si on prend en considération la distribution spatiale de la masse. Cependant, on peut réduire le système à un degré de liberté en considérant les hypothèses suivantes :

- la masse du portique concentrée au niveau de l'étage,
- le mouvement vertical du portique négligeable par rapport au mouvement horizontal,
- les éléments du portique conservent leur rigidité latérale, mais ne possèdent aucune masse.

### 1.4. Deuxième loi de Newton

Les lois fondamentales du mouvement d'un corps de masse  $m$  ont été introduites pour la première fois par Issac Newton (1642-1727). Ces lois représentent la pierre angulaire de la dynamique des structures.

La deuxième loi de Newton stipule : « si on applique une force  $F$  sur un corps de masse  $m$ , la variation de la quantité de mouvement de la masse en fonction du temps est égale à la force  $F$  ». Soit :

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad (1p)$$

Dans ce qui suit, l'analyse se fera uniquement pour les systèmes dont la masse est constante. L'équation précédente peut aussi s'écrire comme ci-dessous :

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma \quad (2p)$$

Où,  
 $F$  : force  
 $m$  : masse  
 $a$  : accélération

Pour présenter d'une manière assez simple le problème de la dynamique des structures, on considère une poutre isostatique soumise à une charge dynamique, c'est-à-dire, une charge qui varie en fonction du temps (Fig.3p). Soit  $F(t)$  cette charge.

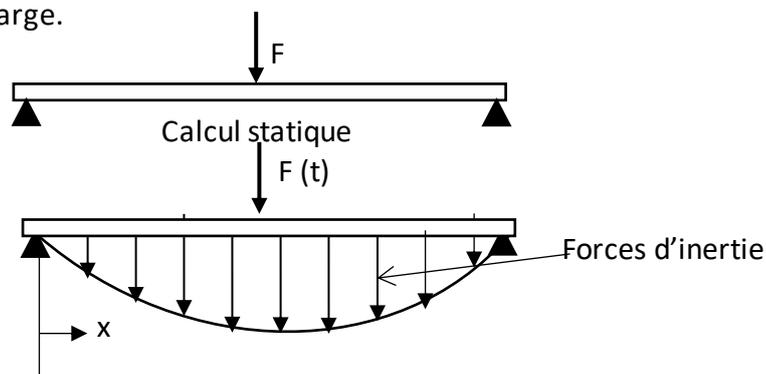


Figure 3p : Illustration du calcul dynamique

Sous l'action de  $F(t)$ , la poutre se déplace. Soit  $y(t)$  les déplacements correspondants. Si on dérive ces déplacements, on obtient des vitesses notées  $\dot{y}(t)$ , qui à leurs tours dérivées donnent des accélérations  $\ddot{y}(t)$ .

On a :

$y(t)$  : déplacement

$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$  : vitesse

$\ddot{y}(t) = \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$  : accélération

Cependant, comme la poutre possède une masse  $m$  infiniment répartie, il en résulte (deuxième loi de Newton) des forces d'inertie  $m\ddot{y}$  qui viennent s'ajouter ou se retrancher à la force  $F(t)$ .

## 1.5. Modélisation en masses concentrées

Pour la modélisation en masses concentrées, on peut l'expliquer sur l'exemple de la poutre précédente. Supposons qu'il soit possible de concentrer la masse de la poutre en un nombre restreint de points (Fig.4p). Ainsi, les forces d'inertie ne sont présentes qu'en ces points. De cette façon, on simplifie considérablement le cas d'une charge la poutre soumise à une uniformément répartie. Il suffit juste d'exprimer les déplacements et les accélérations en ces points qu'on appelle *nœuds*.

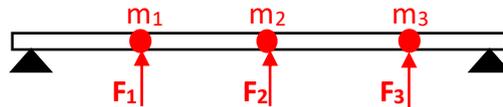


Figure 4p : Modélisation en masses concentrées

Nous avons vu plus haut que le nombre de degrés de liberté représente le nombre de composantes du déplacement nécessaires pour décrire complètement le champ des forces d'inertie. Aussi, pour cet exemple (Fig.4p), si seuls les déplacements verticaux des nœuds sont possibles, alors la poutre comporte  $3 \times 1 = 3$  degrés de liberté.

En général, les nœuds d'une structure donnée possèdent une masse. Ils peuvent subir des translations et des rotations dans l'espace. Chaque nœud possède donc 6 degrés de liberté, et la structure  $6n$  degrés de liberté, où  $n$  est le nombre de nœuds.

La modélisation en masses concentrées est très utile pour les systèmes dans lesquels une grande partie de la masse est effectivement concentrée dans certains emplacements : c'est le cas, par exemple, des bâtiments. La masse de la structure porteuse (poteaux, voiles, ...) peut être, avec une approximation suffisante, concentrée aux niveaux des planchers (moitié au niveau inférieur, et moitié au niveau supérieur).

## 2. Quelles sont les principales étapes d'une analyse dynamique ?

Les principales étapes sont :

- 1) Définition de la charge dynamique.
- 2) Modélisation de la structure.
  - Choix des degrés de liberté (DDL)
  - Définition des propriétés de la structure (masse, rigidité, amortissement, limite élastique, ...)
  - Définition des propriétés du sol

- 3) Calcul dynamique.
- 4) Evaluation et compréhension du comportement dynamique + analyse des résultats.
- 5) Combinaison des actions (contraintes dynamiques + statiques) pour obtenir les valeurs maximales.
- 6) Conception ou vérification de la structure.

En ce qui concerne l'étape (3), c'est-à-dire le calcul dynamique, le choix de la méthode à utiliser dépend des caractéristiques de la structure et du chargement dynamique. Ce choix est résumé sous forme d'organigramme par la figure ci-dessous (Fig.5p).

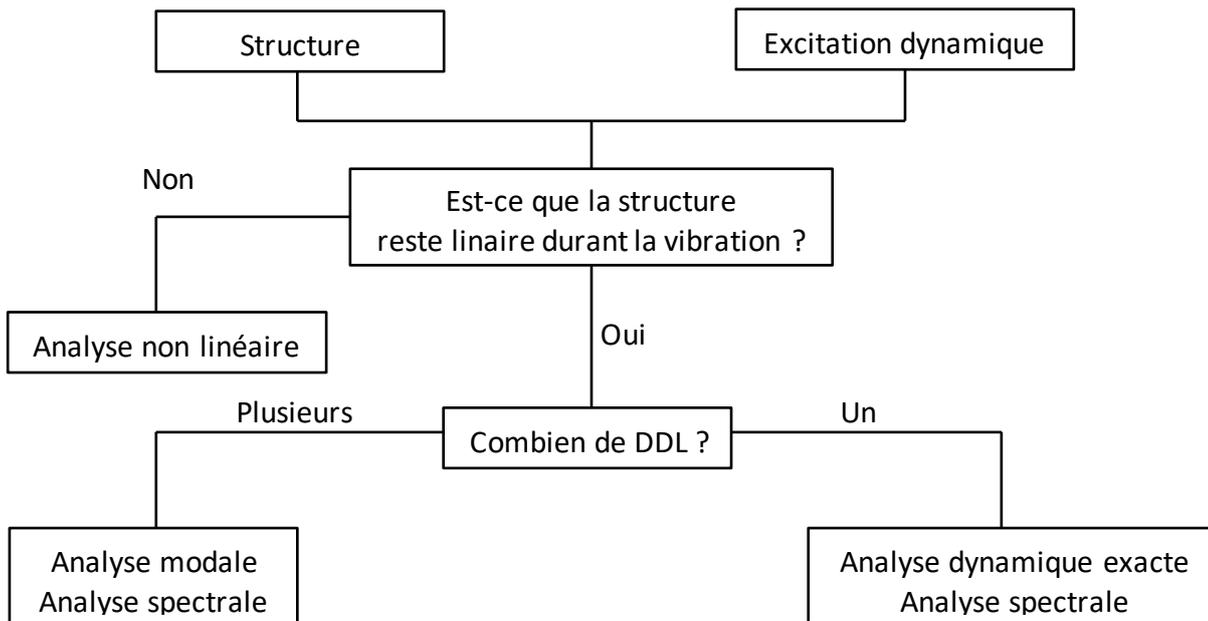


Figure 5p : Méthodes d'analyse dynamique

### 3. Analyse dynamique d'une structure simple à un degré de liberté

#### 3.1. Modèle mathématique

La représentation d'une structure donnée en un système à un seul degré de liberté n'est pas chose facile puisque la précision de la solution dépend la modélisation mathématique.

Un système à un seul degré de liberté, appelé *oscillateur simple*, est un système où toutes les forces d'inertie sont concentrées en une seule masse  $m$ . Ce système est sollicité par une force  $F(t)$  variable dans le temps. Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal  $x(t)$ . La figure ci-dessous représente un tel oscillateur.

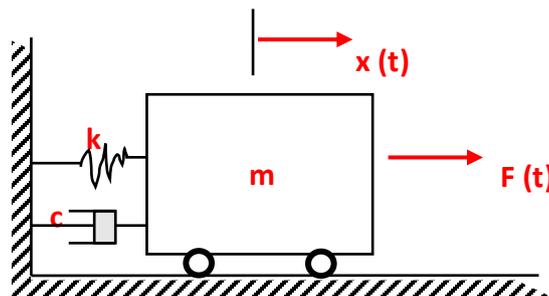


Figure 6p : Modèle mathématique d'un système à un degré de liberté

Où,

$F(t)$  : force dynamique variant avec le temps

$x(t)$  : déplacement de la masse variant avec le temps

$m$  : masse du système (poids/g)

$c$  : coefficient d'amortissement visqueux du système (force dynamique nécessaire pour obtenir une vitesse unitaire). Le coefficient d'amortissement est introduit pour représenter l'énergie dissipée durant la vibration du système. Les sources de cette perte d'énergie sont multiples, et ne sont pas faciles à quantifier de façon individuelle. On utilise l'amortissement visqueux pour son « élégance mathématique » (voir plus loin).

$k$  : rigidité du système (force requise pour obtenir un déplacement unitaire). Pour une structure soumise à des forces latérales,  $k$  représente sa rigidité latérale.

### Remarque

L'étude d'un oscillateur simple est très importante car elle permet de faire celle d'une structure élastique à plusieurs degrés de liberté et plusieurs masses. En effet, le calcul dynamique d'une telle structure est ramené à celui de l'étude d'un certain nombre d'oscillateurs simples caractérisés chacun par un mode de vibration, c'est-à-dire, par une période et un coefficient d'amortissement  $\xi$ . Le cumul des réponses de ces oscillateurs simples permet d'obtenir la réponse de la structure.

## 3.2. Equations du mouvement

### 3.2.1. Chargement dynamique quelconque

Considérons le système à un degré de liberté ci-après.

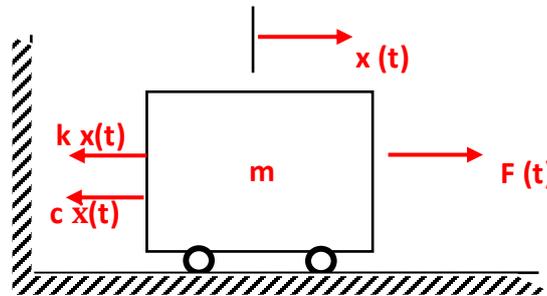


Figure 7p : Oscillateur à un degré de liberté

En appliquant la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$F(t) - k x(t) - c \dot{x}(t) = m \ddot{x}(t) \quad (3p)$$

Ou encore :

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) + c \dot{x}(t) = F(t) \quad (4p)$$

La relation (4p) est l'équation d'équilibre dynamique d'un système à un degré de liberté : c'est l'équation fondamentale de base pour un chargement dynamique quelconque  $F(t)$ . Pour cette équation,  $m$ ,  $k$ , et  $c$  sont supposés constants, c'est-à-dire, ne changent pas durant la réponse (vibration) du système.

Autrement dit, *le système est linéaire*. Par conséquent, la limite élastique du matériau n'est pas dépassée, et aucune plastification n'est tolérée.

### 3.2.2. Excitation à la base : cas du séisme

Dans le cas d'une agression sismique (oscillateur soumis à sa base à un déplacement du sol), la charge dynamique n'est pas engendrée par une force explicite appliquée au système, mais par une force implicite d'inertie causée par un mouvement à la base. Le système (ou structure) se comporte comme un oscillateur dont les modes propres d'oscillation dépendent notamment de la raideur des éléments de la structure.

Pour établir l'équation du mouvement dans le cas d'une excitation sismique, on considère un système à un DDL soumis à un déplacement à sa base  $x_s(t)$ . La figure ci-après schématise ce système.

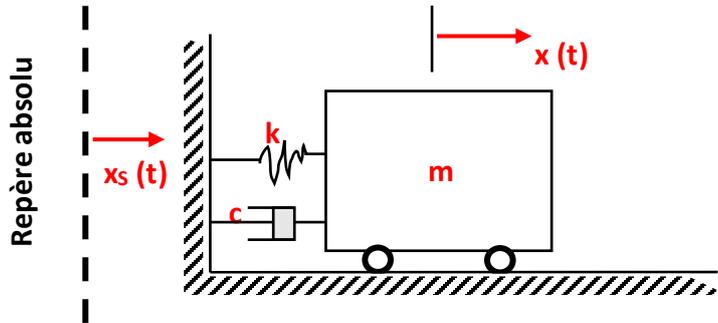


Figure 8p : Système à un degré de liberté soumis à un déplacement à sa base

Ici, le déplacement  $x(t)$ , ou DDL, représente le déplacement relatif par rapport à la base. De plus, la force produite par rigidité du système est proportionnelle à  $x(t)$ , celle produite par l'amortissements visqueux du système, proportionnelle à  $\dot{x}(t)$ , mais la force d'inertie engendrée par la masse du système est proportionnelle à l'accélération totale du système, soit  $[\ddot{x}(t) + \ddot{x}_s(t)]$ .

En appliquant à ce système la deuxième de Newton, on obtient donc :

$$-kx(t) - c\dot{x}(t) = m[\ddot{x}(t) + \ddot{x}_s(t)]$$

Ou encore :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_s(t) \quad (5p)$$

On remarque que l'équation (5p) ressemble à l'équation (4p) sauf que la charge dynamique  $[F(t)]$  est remplacée par une charge fictive dynamique égale à  $[-m\ddot{x}_s(t)]$ .

Ce résultat est très important car il démontre que le cas du séisme (translation à la base) est identique au problème dynamique avec une base fixe. La charge dynamique est simplement remplacée par  $[-m\ddot{x}_s(t)]$ .

La variation dans le temps de l'accélération (et non du déplacement) du sol (accélérogramme) est nécessaire pour déterminer la réponse sismique d'un système à un degré de liberté.

La figure qui suit schématise l'équivalence en cas de séisme.

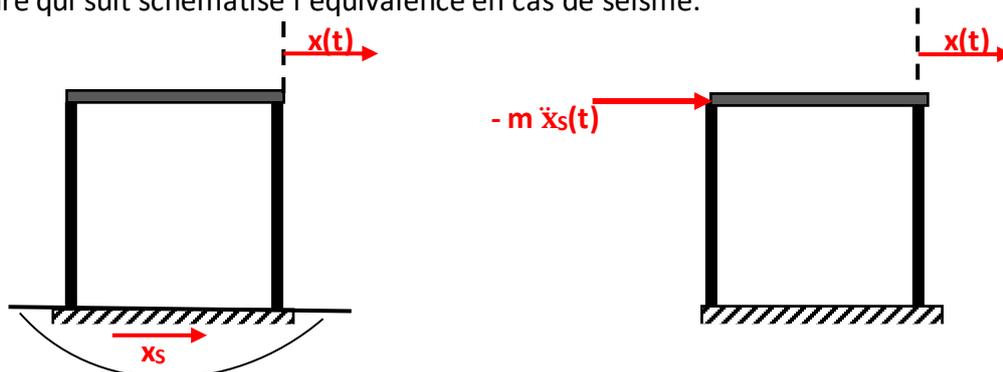


Figure 9p : Equivalence du problème sismique

## 4. Résolution de l'équation fondamentale de l'analyse dynamique d'un système à un degré de liberté

### 4.1. Oscillation libre

La réponse dynamique la plus simple d'un système (ou structure) à un DDL a lieu lorsque celui-ci est en oscillation libre. Celle-ci ne dépend que des conditions initiales (déplacement ou vitesse) sans excitation extérieure.

La réponse à une oscillation libre est très importante car elle permet de déterminer *la période naturelle d'oscillation* d'un système à un degré de liberté.

Pour un système non amorti, l'équation fondamentale s'écrit :

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (6p)$$

Ou encore,

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (7p)$$

Où,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

La solution générale de l'équation (7p) est :

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (8p)$$

A et B : constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales

Si  $x_0$  et  $\dot{x}_0$  représentent respectivement le déplacement initial et la vitesse initiale, alors la solution générale s'écrit :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \quad (9p)$$

Où,

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$B = x_0$$

La représentation graphique de la solution générale est (Fig.10p) :

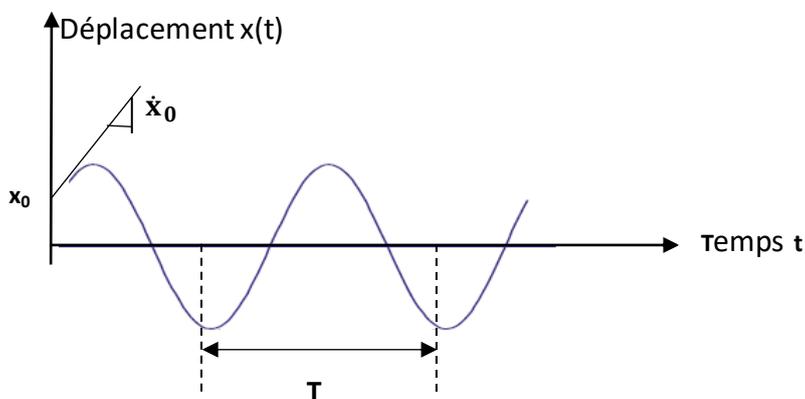


Figure 10p : Oscillation libre non amortie d'un système à 1 DDL (oscillateur simple)

## Interprétation du mouvement

Pour un oscillateur simple, ou structure à 1DDL, en vibration libre non amortie (ici, il s'agit du dépliement  $x(t)$  de la masse), on constate :

- 1) L'amplitude de l'oscillation est constante. Cela veut dire que la structure oscille indéfiniment avec une amplitude maximale  $x_0$ . Physiquement, c'est impossible, d'où le concept d'amortissement\*.
- 2) Le temps mis pour effectuer un aller-retour durant le mouvement d'oscillation libre s'appelle *période naturelle du système (ou structure) ou période propre*. Une structure à  $n$  degrés de liberté a  $n$  périodes, la période la plus longue est de loin la plus importante.
- 3) La grandeur  $\omega$  représente *la pulsation* de la structure ou encore *fréquence angulaire* d'oscillation. Elle s'exprime en radians par seconde.
- 4) La fréquence propre  $f$  est la fréquence de vibration naturelle d'une structure en l'absence d'excitation extérieure. Elle représente l'inverse de la période, et s'exprime en cycles par seconde ou Hertz (la fréquence la plus basse est la fréquence fondamentale).
- 5) Les grandeurs fondamentales  $T$ ,  $\omega$ , et  $f$  dépendent uniquement de la masse et de la rigidité de la structure. Elles sont égales à :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

↓

Période propre

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

↓

Pulsation propre (rd/s)

$$\rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

↓

Fréquence propre

### (\* Remarque 1

En réalité, l'amplitude de l'oscillation décroît au cours du temps et la masse retrouve au bout d'un certain temps une position d'équilibre (Fig.11p).

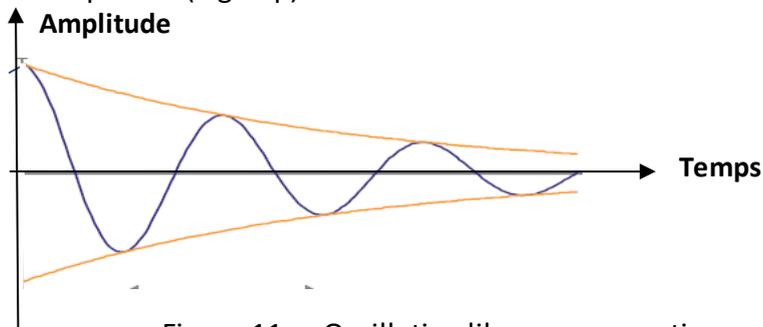


Figure 11p : Oscillation libre avec amortissement

Une partie de l'énergie élastique emmagasinée dans la structure est dissipée au cours du temps : ce phénomène est dénommé de façon générique *amortissement*. En fait, ce dernier peut résulter de différents mécanismes. Par exemple, dans le cas d'un bâtiment, les sources de dissipation d'énergie sont multiples : fissuration du béton, plastification des aciers, glissement relatif entre la structure porteuse et les éléments secondaires (cloisons, baies vitrées, etc.). Mais, pour simplifier, on suppose que les phénomènes de dissipation proviennent d'un amortissement visqueux linéaire.

Un amortissement visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :  $-c \dot{x}(t)$ .

### Remarque 2

Si deux structures ont même rigidité mais des masses différentes, celle qui possède une plus grande masse aura une période fondamentale plus longue et une fréquence naturelle plus basse. Inversement, si deux structures possèdent même masse, mais des rigidités différentes, celle qui possède la plus grande rigidité aura une période naturelle de vibration plus courte et une fréquence naturelle plus longue.

## 4.2. Oscillation amortie

On a vu plus haut que toute structure en oscillation libre possède un amortissement tendant à diminuer l'amplitude des oscillations dans le temps, et qu'on distingue plusieurs types d'amortissement. On peut citer :

- l'amortissement visqueux où la force est proportionnelle à la vitesse,
- l'amortissement frictionnel où la force est constante,
- l'amortissement interne où la force est proportionnelle à l'amplitude du déplacement.

Mais, dans le calcul des structures, on utilise presque tout le temps l'amortissement visqueux. L'équation fondamentale devient :

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (10p)$$

Ou encore :

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \dot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad (11p)$$

On définit :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12p)$$

$$\xi = \frac{c}{2\omega m} \quad (13p)$$

Où,

$\omega$  : fréquence circulaire

$\xi$  : pourcentage d'amortissement critique  $\geq 0$

On obtient alors :

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (14p)$$

La solution générale de l'équation (14p) a pour forme :

$$x(t) = c e^{\lambda t} \quad (15p)$$

En remplaçant  $[x(t) = c e^{\lambda t}]$  dans l'équation (14p), on obtient :

$$c e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2) = 0 \quad (16p)$$

L'équation (16p) est une équation du second degré en  $\lambda$  dont la solution dépend du signe du déterminant  $\Delta$ , qui lui-même dépend de  $\xi$ . Il est égal à :

$$\Delta = \omega^2 (\xi^2 - 1)$$

Il vient :

$$\lambda = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (17p)$$

La forme de la solution dépend donc du signe de la racine carrée. Trois cas sont possibles :

- $\xi > 1 \rightarrow$  système sur-amorti ou surcritique
- $\xi = 1 \rightarrow$  système à amortissement critique
- $\xi < 1 \rightarrow$  système sous-amorti ou amortissement sous-critique
- $\xi = 0 \rightarrow$  système non amorti

En génie civil, seul le système sous-amorti présente un intérêt pratique.

#### 4.2.1. Système sur amorti ( $\xi > 1$ ) ou ( $\xi > 2m\omega$ )

Dans ce cas, les racines de l'équation (18p) sont des valeurs négatives et réelles. Soit :

$$\lambda = -\xi \omega \pm \omega_s$$

Avec,

$$\omega_s = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (18p)$$

Ce qui donne comme solution générale :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [C_1 e^{\omega_s t} + C_2 e^{-\omega_s t}] \quad (19p)$$

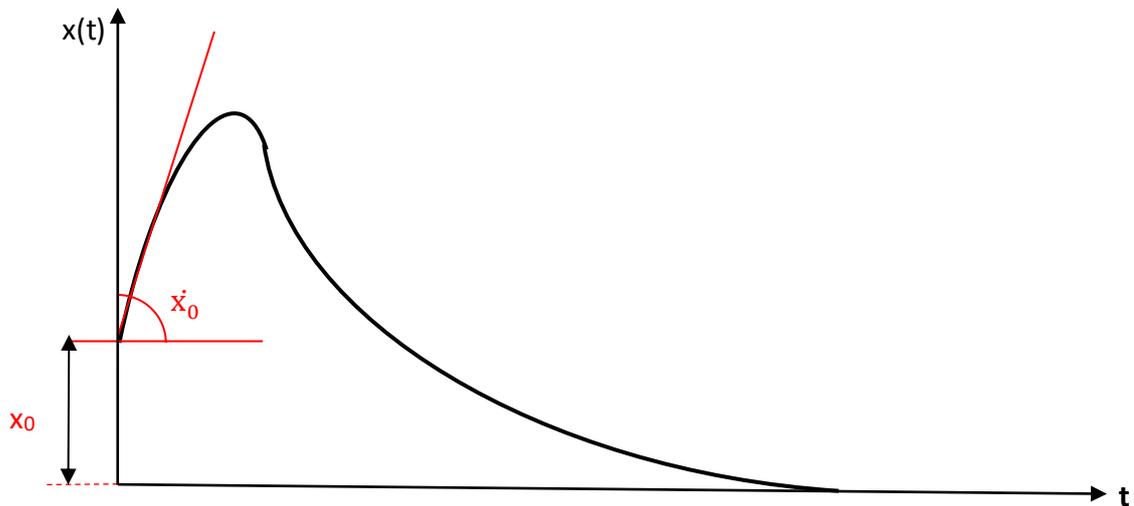


Figure 12p : Réponse typique d'un système sur-amorti

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées par les conditions initiales du mouvement. Si à  $t = 0$ , on a :

$x(t) = x_0 =$  déplacement initial

$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 =$  vitesse initiale

Alors,

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \sinh(\omega_s t) + x_0 \cosh(\omega_s t) \right] \quad (20p)$$

La représentation graphique de l'équation (20p) indique qu'aucune oscillation n'est possible (Fig.12p).

Dans l'analyse dynamique des structures en génie civil, ce cas n'a pas d'importance pratique.

#### 4.2.2. Système à amortissement critique ( $\xi = 1$ ) ou ( $\xi = 2m\omega$ )

Dans ce cas, on a deux racines égales, et la solution générale devient :

$$x(t) = [C_1 + C_2 t] e^{-\omega t} \quad (21p)$$

Avec les conditions initiales,  $x_0$  et  $\dot{x}_0$  à  $t=0$ , on obtient :

$$x(t) = x_0 \left[ 1 + \left( \omega + \frac{\dot{x}_0}{x_0} \right) t \right] e^{-\omega t} \quad (22p)$$

La représentation graphique de la solution de l'équation (22p) montre qu'aucune oscillation au cours du temps n'est possible, et que le déplacement tend vers zéro au bout d'un temps infini (Fig.13p). On peut en déduire que l'amortissement critique correspond à la petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en oscillation libre ne comporte pas de vibration (Fig.13p). Autrement dit, ce cas est la limite entre une réponse oscillatoire et une réponse monotone (sans vibration).

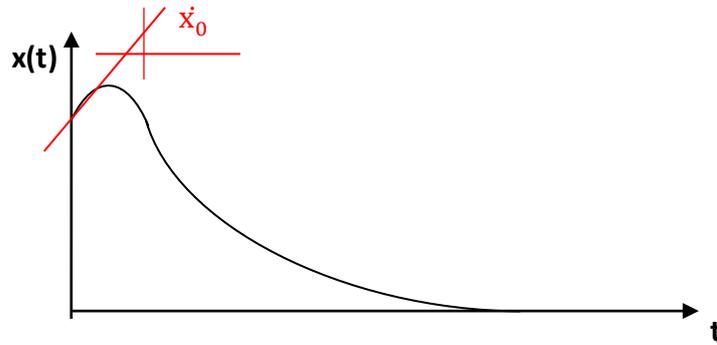


Figure 13p : Réponse d'un système avec amortissement critique

Pour ce cas, on définit :

$$\xi_{cr} = \frac{c}{c_r} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega}$$

Où,

$c_r$  : coefficient d'amortissement critique

$\xi_{cr}$  : amortissement critique =  $2m\omega$

On peut également exprimer  $c_r$  en fonction de la fréquence propre. Ce qui donne :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow c_r = \frac{2k}{\omega}$$

Dans l'analyse des structures de génie civil, l'amortissement critique n'a pas de valeur pratique. Seuls les systèmes sous-amortis avec un amortissement visqueux inférieur ou égal à 20% ( $\xi < 0,2$ ) de l'amortissement critique sont pris en considération.

#### 4.2.3. Système sous-amorti ou sous-critique ( $\xi < 1$ ) ou ( $\xi < 2m\omega$ )

Il s'agit du cas pratique le plus important. Il représente pour la dynamique des structures un amortissement inférieur à l'amortissement critique, et c'est le seul cas intéressant pour les structures car elles ont toujours un amortissement inférieur à 1.

Pour ce système, les racines de l'équation (18p) ont des valeurs complexes. Ces valeurs sont :

$$\lambda = -\xi \omega \pm i \omega_s \quad (23p)$$

Où,

$$i = \sqrt{-1}$$

On définit  $\omega_d$ , tel que :

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (24p)$$

La solution de l'équation (12p) est donc :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [C_1 e^{i\omega_d t} + C_2 e^{-i\omega_d t}] \quad (25p)$$

Et, en utilisant les relations d'Euler (\*), la solution s'écrit :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t] \quad (26p)$$

Les constantes A et B sont déterminées en utilisant les conditions initiales du mouvement. Si à  $t = 0$ ,

$$x(t=0) = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$$

Alors, la réponse du système soumis aux conditions initiales, s'écrit :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \underbrace{\frac{x_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d}}_A \sin \omega_d t + \underbrace{x_0}_B \cos \omega_d t \right] \quad (27p)$$

Avec,

$$A = \frac{x_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d}$$

$$B = x_0$$

Le système amorti oscille donc à une pulsation légèrement inférieure à la pulsation du système non amorti.

L'équation précédente peut s'écrire :

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (28p)$$

Avec,

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{\omega_d} \sqrt{(x_0 \omega_d)^2 + (x_0 \dot{x}_0 + \xi \omega x_0)^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \left[ \frac{\omega_d x_0}{x_0 \dot{x}_0 + \xi \omega x_0} \right] \end{aligned} \right\} \quad (29p)$$

X : amplitude de la réponse

$\phi$  : angle de phase

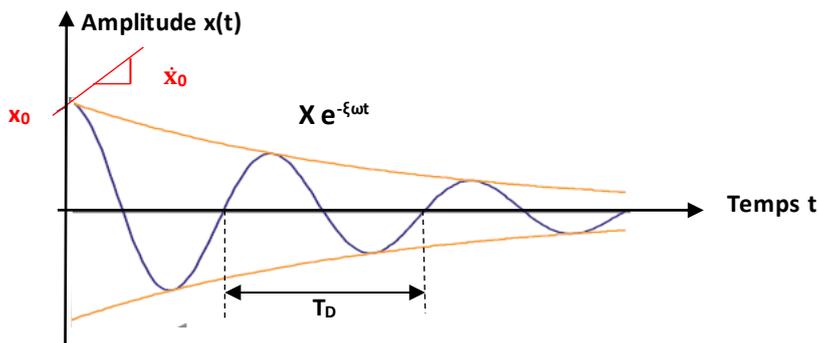


Figure 14p : Réponse typique d'un système sous-amorti

On remarque que le mouvement est pseudo-périodique avec une fréquence circulaire  $\omega_d$ . L'amplitude des extrema (espacés d'un temps  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ ), égale à  $X e^{-\xi\omega t}$ , décroît avec le temps à cause de l'amortissement, pour tendre vers zéro au bout d'un temps infini (Fig.14p).

La pseudo-période a pour valeur :  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$

$$\left. \begin{aligned} \omega_d &= \omega \sqrt{1 - \xi^2} \\ f_d &= \frac{\omega_d}{2\pi} \\ T_d &= \frac{1}{f_d} \end{aligned} \right\} \quad (30p)$$

$\omega_d$  : pulsation propre amortie ou pseudo-pulsation

$f_d$  : fréquence naturelle amortie

$T_d$  : période naturelle amortie

Dans les cas courants, le coefficient  $\xi$  est inférieur à 20%. On peut donc confondre  $\omega_d$  et  $\omega$  avec une précision meilleure que 20%. En effet, si un système a un amortissement représentant 20% de l'amortissement critique, cela donne :

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = \omega \sqrt{1 - 0,2^2} = \omega \sqrt{0,96} = 0,98\omega$$

$$\omega_d = 0,98\omega \quad (31p)$$

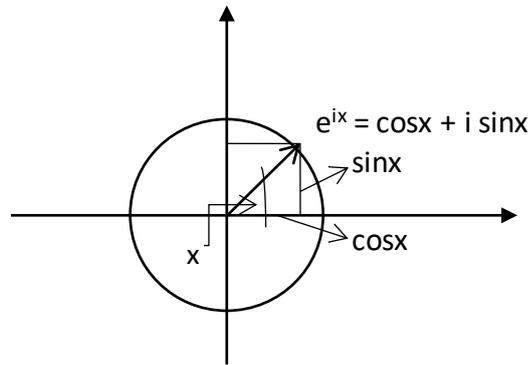
La pseudo-période de l'oscillateur a donc une valeur très voisine de celle du même oscillateur supposé non amorti. Cela explique pourquoi on les confond en pratique.

### (\*) Remarque

Les relations d'Euler s'écrivent pour tout nombre réel  $x$  :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \rightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad \rightarrow \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$



## 4.3. Décrément logarithmique

Pour mettre en évidence la fraction d'amortissement d'une structure soumise à une oscillation libre ou naturelle (non forcée), considérons la réponse typique d'un système sous-amorti représenté par la Figure 14p. On remarque que le rapport des amplitudes de deux maxima successifs est constant quel que soit la valeur de  $n$ , et est égal à  $\frac{2\pi}{\omega_d}$ .

En utilisant l'équation (28), il vient :

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{e^{-\xi\omega t_n}}{e^{-\xi\omega (t_{n+1})}} = \frac{e^{-\xi\omega t_n}}{e^{-\xi\omega (t_n + T_d)}} = e^{-\xi\omega (T_n - T_n - T_d)} = e^{\xi\omega T_d}$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\xi\omega T_d} \quad (32p)$$

Le logarithme naturel ou népérien de ce rapport se nomme *décrément logarithmique* que l'on désigne par  $\delta$ . Soit :

$$\delta = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \ln(e^{\xi\omega T_d}) = \xi\omega T_d = \xi\omega \frac{2\pi}{\omega_d} = \xi\omega \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (33p)$$

Cette dernière expression permet de déterminer la fraction d'amortissement critique  $\xi$ , soit :

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2}} \approx \frac{\delta}{2\pi} \quad (34p)$$

La mesure du décrément logarithmique est fréquemment utilisée pour mesurer  $\xi$ .

### Remarque

Si le décrément est long, on obtient une réponse plus précise en comparant 2 amplitudes séparées par plusieurs cycles  $p$  au lieu de considérer deux amplitudes successives. Dans ce cas, l'expression précédente devient :

$$\delta = \frac{1}{p} \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+p}}\right) \quad (35p)$$

Nous avons vu plus haut que pour de faibles valeurs de  $\xi$  (inférieures à 20%), valeurs rencontrées dans la pratique, on peut confondre  $\omega$  avec  $\omega_d$ . La figure ci-dessous donne la variation  $\frac{\omega}{\omega_d}$  en fonction de  $\xi$ . Celle-ci est représentée par un cercle de rayon unité.

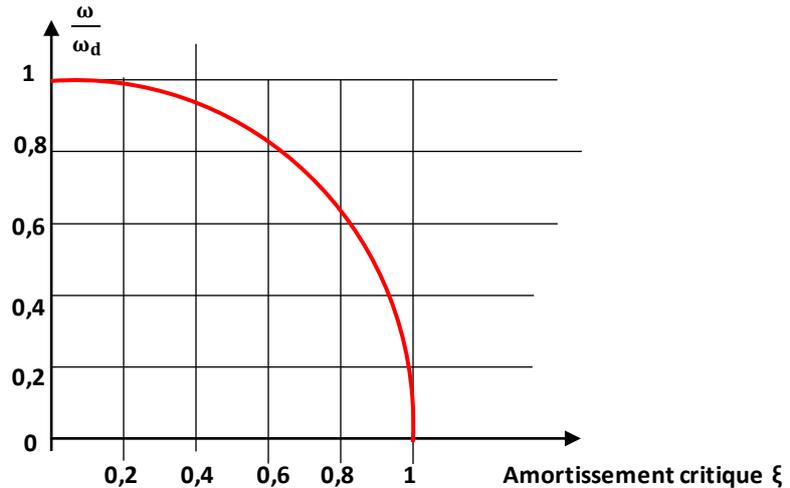


Figure 15p : Variation de la pulsation propre amortie en fonction de  $\xi$

### Remarque

Pour les structures en béton armé,  $\xi$  est assez faible, de l'ordre de 0,02. Aussi,  $\delta$  est quasiment nul puisque le rapport entre deux amplitudes successives est voisin de l'unité. Dans ce cas, on mesure le rapport de  $p$  amplitudes successives, soit :

$$\ln \left( \frac{x_n}{x_{n+p}} \right) = \ln \left( \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) + \dots + \ln \left( \frac{x_{n+p-1}}{x_{n+p}} \right) = 2\pi\xi p$$

D'où,

$$\xi = \frac{1}{2\pi p} \ln \left( \frac{x_n}{x_{n+p}} \right) \quad (36p)$$

### Exercice

Représenter graphiquement le mouvement libre d'un système ayant trois types d'amortissement ( $\xi = 0,1$  ;  $\xi = 1$  ;  $\xi = 3$ ), et avec comme conditions initiales  $x = x_0$  et  $\dot{x}_0 = 0$ .

### Réponse

Les différentes valeurs de  $x(t)$  sont :

- Pour  $\xi = 0,1$

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

$$X = \frac{1}{\omega_d} \sqrt{(x_0 \omega_d)^2 + (\dot{x}_0 + \xi \omega x_0)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0} \right]$$

On obtient :

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = \omega \sqrt{1 - 0,1^2} = 0,9949\omega \approx 0,995\omega$$

$$X = \frac{1}{0,995\omega} \sqrt{(x_0 0,995\omega)^2 + (0,1\omega x_0)^2} = 1,005 x_0$$

$$X = 1,005 x_0$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{\omega_d x_0}{\dot{x}_0 + \xi \omega x_0} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{0,995\omega x_0}{0,1\omega x_0} \right] = \tan^{-1} [9,95] = 1,47$$

$$\phi = 1,47$$

Pour  $\xi = 0,1$

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_d t + \phi) = 1,005 x_0 e^{-0,1\omega t} \sin(0,995\omega t + 1,47)$$

$$x(t) = 1,005 x_0 e^{-0,1\omega t} \sin(0,995\omega t + 1,47)$$

- Pour  $\xi = 1$

$$x(t) = x_0 \left[ 1 + \left( \omega + \frac{\dot{x}_0}{x_0} \right) t \right] e^{-\omega t}$$

$$x(t) = x_0 [1 + \omega t] e^{-\omega t}$$

- Pour  $\xi = 3$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [C_1 e^{\omega_s t} + C_2 e^{-\omega_s t}]$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \operatorname{sh}(\omega_s t) + x_0 \operatorname{ch}(\omega_s t) \right]$$

$$\omega_s = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} = \omega \sqrt{3^2 - 1} = 2,828 \omega \approx 2,83 \omega$$

$$\omega_s = 2,83 \omega$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_s} \operatorname{sh}(\omega_s t) + x_0 \operatorname{ch}(\omega_s t) \right] = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{3\omega x_0}{2,83\omega} \sinh(2,83\omega t) + x_0 \cosh(2,83\omega t) \right]$$

$$x(t) = e^{-3\omega t} [0,53 x_0 (e^{2,83\omega t} - e^{-2,83\omega t}) + 0,5 x_0 (e^{2,83\omega t} + e^{-2,83\omega t})]$$

$$x(t) = e^{-3\omega t} x_0 [1,03 e^{2,83\omega t} - 0,03 e^{-2,83\omega t}] = 1,03 e^{-0,17\omega t} - 0,03 x_0 e^{-5,83\omega t}$$

$$x(t) = 1,03 e^{-0,17\omega t} - 0,03 x_0 e^{-5,83\omega t}$$

La figure suivante représente le mouvement libre d'un système pour trois valeurs de l'amortissement.

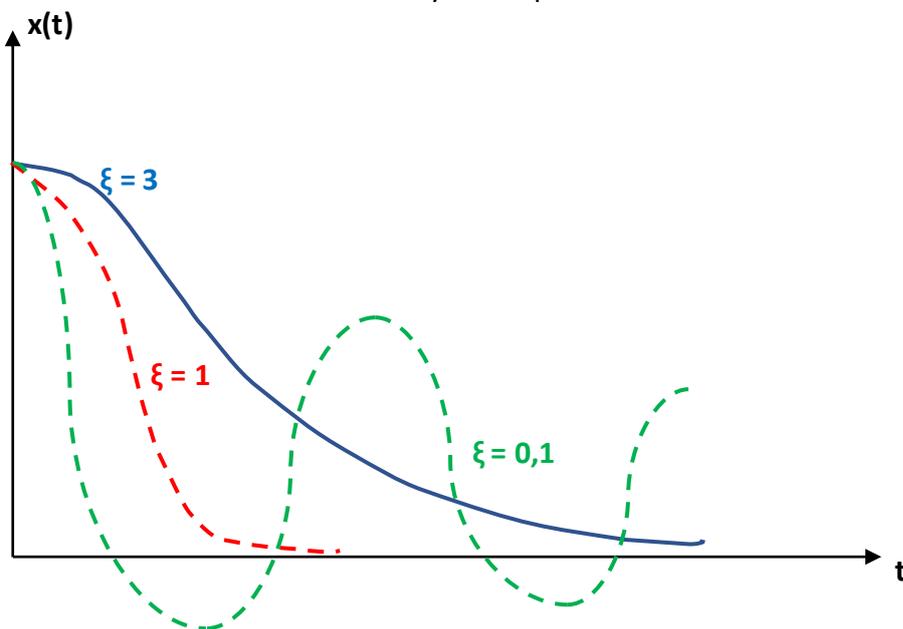


Figure 16p : Oscillation libre pour trois types d'amortissement

La représentation graphique du mouvement libre pour trois types d'amortissement montre que  $x(t)$  tend vers zéro au bout d'un temps infini.

### Rappel

$$e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$$

$$e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

## 4.4. Applications

### 4.4.1. Fréquences naturelles d'un bâtiment

Le but de cette application consiste à choisir un modèle à un degré de liberté pour un bâtiment industriel en charpente métallique (Fig.17p), et de déterminer sa période de vibration naturelle suivant les deux directions principales.

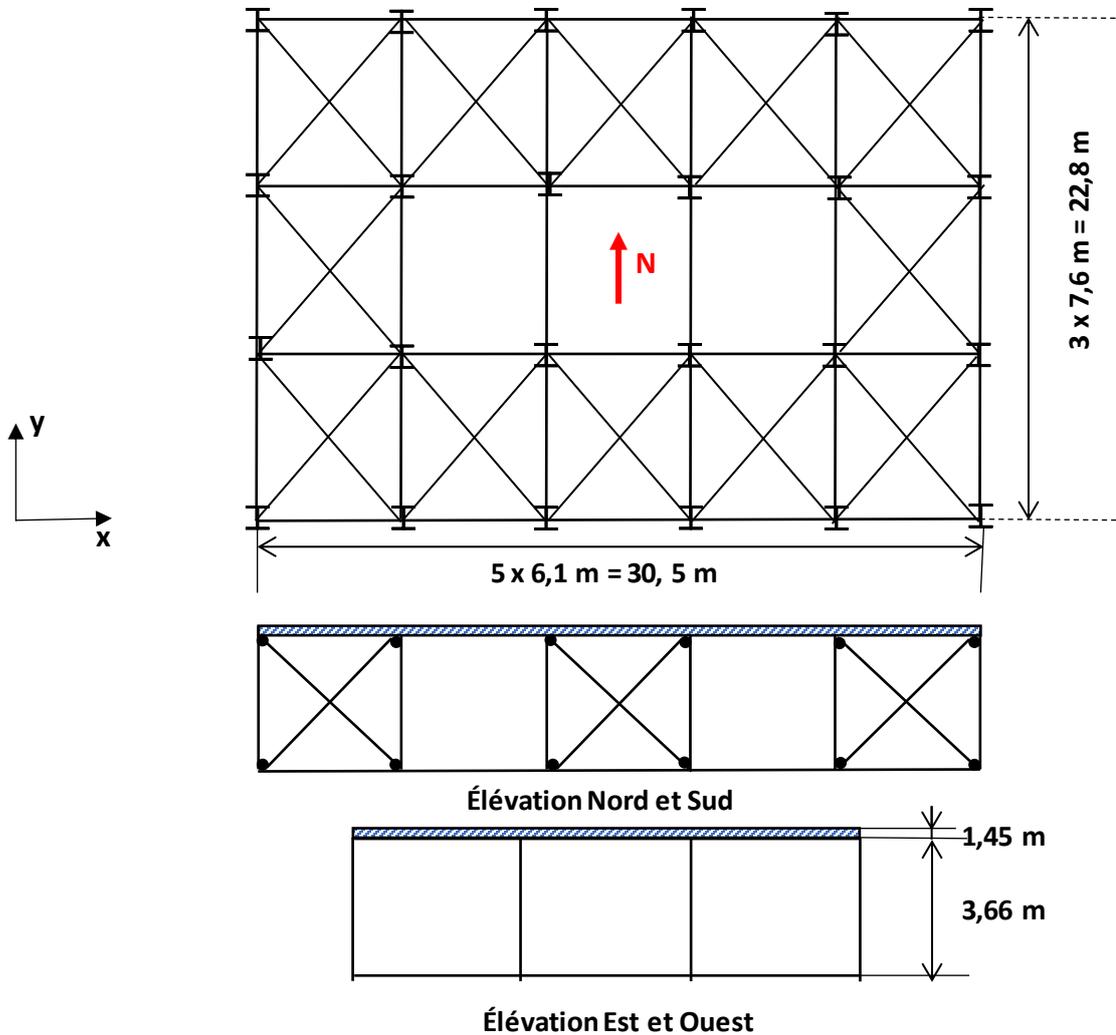
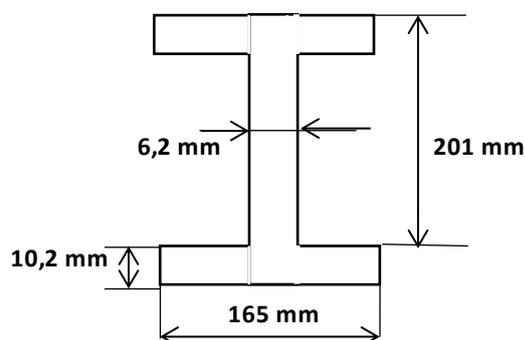


Figure 17p : Vues en plan et en élévation d'un bâtiment en charpente métallique

Les contreventements verticaux sont réalisés avec des barres circulaires, de diamètre  $\Phi 25 \text{ mm}$ . Ces barres sont très élancées et ne peuvent résister à aucune compression. Tous les poteaux sont identiques, réalisés avec un profilé W200 x 36.

#### 1. Données utiles

- Caractéristiques du profilé W200 x 36

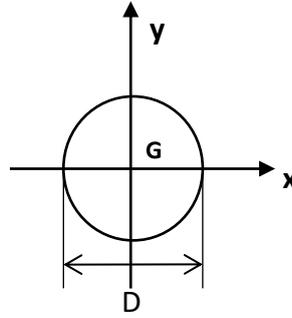


Module de résistance =  $342 \times 10^3 \text{ mm}^3$

- Moment quadratique d'un cercle

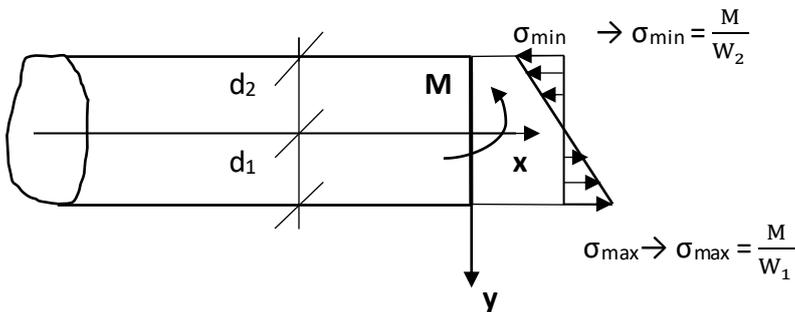
$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I_G = \frac{\pi D^4}{32}$$



- Moment de résistance à la flexion

$$\sigma = \frac{Mv}{I} \rightarrow \begin{cases} v = d_1 \rightarrow \sigma_{\max} = \frac{Md_1}{I} \rightarrow I = W_1 d_1 \rightarrow \sigma_{\max} \\ v = d_2 \rightarrow \sigma_{\min} = \frac{Md_2}{I} \rightarrow I = W_2 d_2 \rightarrow \sigma_{\min} \end{cases}$$



W : moment de résistance à la flexion

- Charges permanentes

Les charges permanentes se trouvent dans le tableau suivant :

Charge sur la toiture (kPa)	
Toiture (matériau)	0,43
Eclairage, plafond, équipement...	0,29
Treillis de la toiture	0,12
Solives de toit	0,10
Contreventement latérale	0,10
Moitié des poteaux (1,83m)	0,02
<b>Total</b>	<b>1,06</b>
Charge sur les murs (kPa)	
Cadres, fenêtres	0,19
Revêtement	0,29
<b>Total</b>	<b>0,48</b>

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$

## 2. Calcul de la masse de la structure équivalente à un degré de liberté

$$W = (1,06) \times (22,8) \times (30,5) + 2 \times (0,48) \times (1,83) \times [22,8 + 30,5]$$

$$= 737,124 + 93,63744$$

$$W = 830,76 \text{ kN}$$

La masse correspondante est :

$$m = \frac{W}{g} = \frac{830,76}{9,81} = 84,69 \approx 84,7 \text{ kN s}^2 / \text{m}$$

$$m = 84,7 \text{ kN s}^2 / \text{m}$$

### 3. Calcul de la rigidité latérale du bâtiment suivant les deux directions

#### - Direction Nord-Sud

Dans la direction latérale, les portiques résistent aux moments assurant la rigidité latérale. Comme, ici, la rigidité des poutres est beaucoup plus grande que celle des poteaux, on peut alors écrire :

$$k_i = \frac{12 EI}{L^3} = \frac{(12)(200 \times 10^6)(34,4 \times 10^{-6})}{3,66^3} = 1683,939 \approx 1684 \text{ N/m}$$

$$k_i = 1684 \text{ N/m}$$

$$k = \sum_{i=1}^{24} k_i = 24 \times 1684 = 40\,416 \text{ kN/m}$$

$$k = 40\,416 \text{ kN/m}$$

#### - Direction Est-Ouest

Dans la direction Est-Ouest, la stabilité latérale est assurée par des contreventement bi-articulés. Dans pareille situation, la rigidité totale suivant cette direction, est donnée par l'expression suivante :

$$k_i = \frac{AE}{L_d} \cos^2 \theta$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 490 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$A = 490 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_d = \sqrt{3,66^2 + 6,1^2} = 7,11 \text{ m}$$

$$L_d = 7,11 \text{ m}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{3,66}{6,1} \right) = 31^\circ \rightarrow \cos 31^\circ = 0,858$$

$$\cos 31^\circ = 0,858$$

$$k_i = \frac{AE}{L_d} \cos^2 \theta = \frac{(490 \times 10^{-6})(200 \times 10^6)(0,858)^2}{7,11} = 10\,146,84 \approx 10\,147 \text{ kN/m}$$

$$k_i = 10\,147 \text{ kN/m}$$

$$k = 6 \times k_i = 6 \times 10\,147 = 60\,882 \text{ kN/m}$$

$$k = 60\,882 \text{ kN/m}$$

### 4. Fréquences naturelles

#### - Direction Nord-Sud

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40\,416}{84,7}} = 22,16 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 22,16 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3,14}{22,16} = 0,283 \text{ sec}$$

$$T = 0,283 \text{ sec}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,283} = 3,53 \text{ Hertz}$$

$$f = 3,53 \text{ Hertz}$$

#### - Direction Est-Ouest

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60\,882}{84,7}} = 26,81 \text{ rad/s}$$

$$\omega = 26,81 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3,14}{26,81} = 0,234 \text{ sec}$$

$$T = 0,234 \text{ sec}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,234} = 4,27 \text{ Hertz}$$

$$f = 4,27 \text{ Hertz}$$

Dans cette application, les vibrations de torsion ne sont pas prises en considération.

#### 4.4.2. Essais en oscillation libre d'un bâtiment à un seul niveau

On considère le bâtiment représenté par la Figure 18p. On veut estimer les propriétés dynamiques de ce bâtiment (poids total, fréquences naturelle et fraction d'amortissement critique). Pour cela, on effectue un essai. Ce dernier consiste à déplacer le plancher horizontalement, puis le relâcher soudainement au moyen d'un vérin hydraulique.

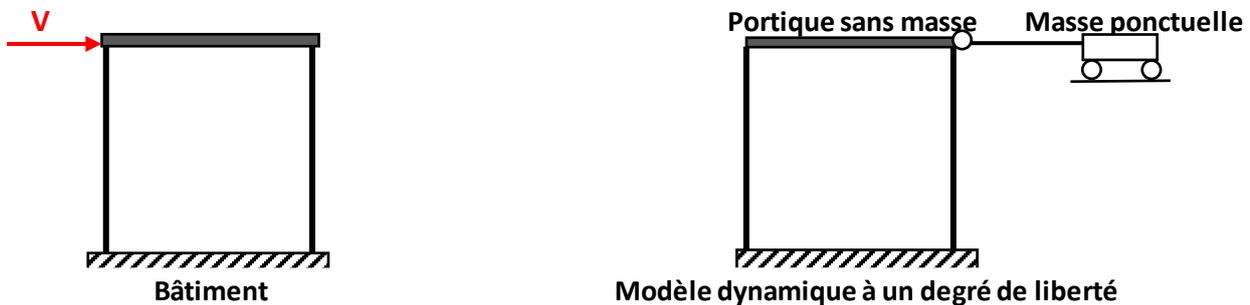


Figure 18p : Bâtiment avec un seul niveau

Durant cet essai, on constate qu'on a besoin d'une force de 89 kN pour déplacer ce plancher de 5 mm. L'amplitude de vibration n'est que de 4 mm, un cycle après le relâchement initial du plancher. Le temps nécessaire pour effectuer ce cycle est de 1,4 sec.

La rigidité du bâtiment est :

$$k = \frac{V}{\Delta} = \frac{89}{5} = 17,8 \text{ kN/mm}$$

$$k = 17,8 \text{ kN/mm}$$

Le poids du plancher est alors :

$$W = \frac{g \times k \times T^2}{(2\pi)^2} = \frac{9810 \times 17,8 \times 1,4^2}{(2\pi)^2} = 8288 \text{ kN}$$

$$W = 8288 \text{ kN}$$

La fréquence naturelle est :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,4} = 0,714 \text{ Hz}$$

$$f = 0,714 \text{ Hz}$$

Le décrément logarithmique est :

$$\delta = \ln \left( \frac{x_n}{x_{n+p}} \right) = \ln \left( \frac{5}{4} \right) = 0,223$$

$$\delta = 0,223$$

La fraction d'amortissement critique est :

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,223}{2\pi} = 0,0355 = 3,55 \% \text{ de l'amortissement critique}$$

$$\xi = 3,55 \% \text{ de l'amortissement critique}$$

## 5. Equation fondamentale d'une oscillation forcée

L'équation du mouvement d'un système linéaire à un degré de liberté soumis à une force dynamique quelconque  $F(t)$  est donnée par l'expression (4p) :

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t)$$

$F(t)$  peut s'agir d'une force périodique engendrée par une machine [Fig.19p(a)] ou d'une charge de courte durée générée par un choc [Fig.19p(b)].

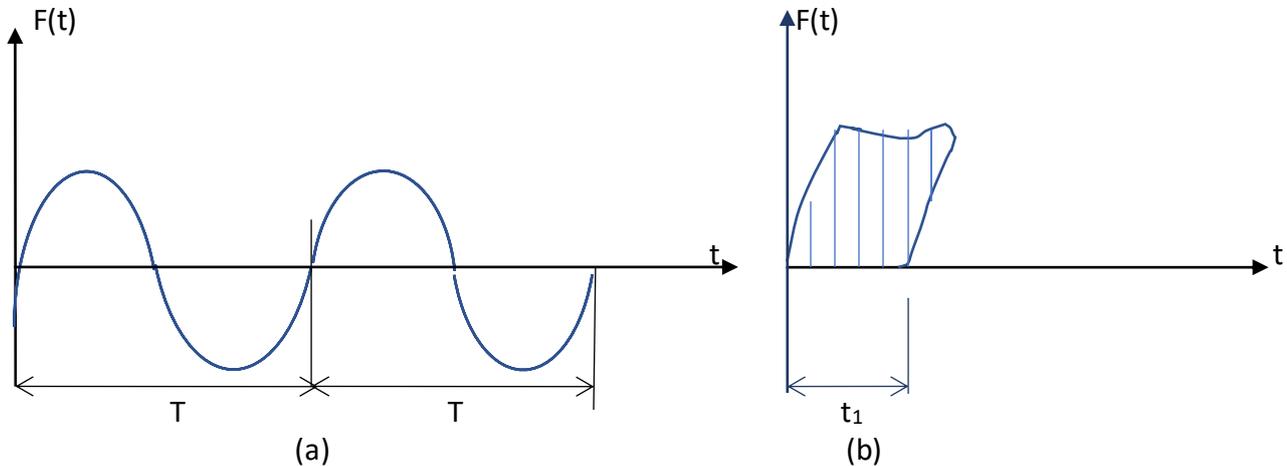


Figure 19p : Force périodique - Charge de courte de durée

Pour résoudre l'équation (4p), et développer par la suite une méthode générale valable pour toute charge dynamique  $F(t)$ , on commence d'abord par nous intéresser à la réponse d'un système soumis à une charge de courte durée ou charge ponctuelle.

Pour cette démonstration, on utilise les propriétés de la fonction temporelle de Dirac ou fonction delta de Dirac.

Selon Dirac, on peut représenter une charge unité ponctuelle à l'origine par une fonction  $\delta(x)$  qui vaudrait :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \rightarrow x \neq 0 \\ \infty & \rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Et, telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Une telle fonction est cependant mathématiquement mal définie, car l'intégrale d'une fonction presque partout nulle est nulle.

### 5.1. Oscillation sous charge de courte durée

D'après l'équation fondamentale de la dynamique (4p), la variation de la quantité de mouvement de la masse  $m$  est égale à la résultante des forces appliquées, soit :

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = F(t) - k x(t) - c \dot{x}(t)$$

Si la force  $F(t)$  agit pendant une durée très courte, autrement dit, inférieure à la période de vibration naturelle du système. Ce dernier n'aura pas le temps de réagir : la rigidité et l'amortissement n'ont pas le temps de développer des forces. On en déduit que les deux termes du membre de droite de l'équation précédente sont nuls, soit :

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = F(t)$$

Pour conséquent, une force de courte durée peut être considérée comme un changement ponctuel de vitesse.

En supposant qu'à  $t = 0$ , le système est au repos, alors l'équation fondamentale du mouvement peut s'écrire :

$$\int_0^{t_1} F(t) dt = m \dot{x}(t) \quad (37p)$$

Où,  
 $0 \leq t < t_1$

Après application de la force, c'est-à-dire à  $t > t_1$ , le système se met en vibration avec les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} F(t) dt \\ x(t_1) = 0 \text{ (négligeable)} \end{cases}$$

La réponse du système à cette sollicitation est donnée par l'équation suivante (27p) :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{x_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right]$$

Soit,

$$x(t-t_1) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^{t_1} F(t) e^{-\xi\omega (t-t_1)} \sin [\omega_d (t-t_1)] dt$$

(38p)

## 5.2. Oscillation sous charge dynamique quelconque : intégrale de Duhamel

On peut utiliser la réponse d'un système soumis à une charge dynamique de courte durée pour l'étendre à un système soumis à une charge quelconque  $F(t)$  en la considérant comme une succession de charges de courte durée (Fig.20p).

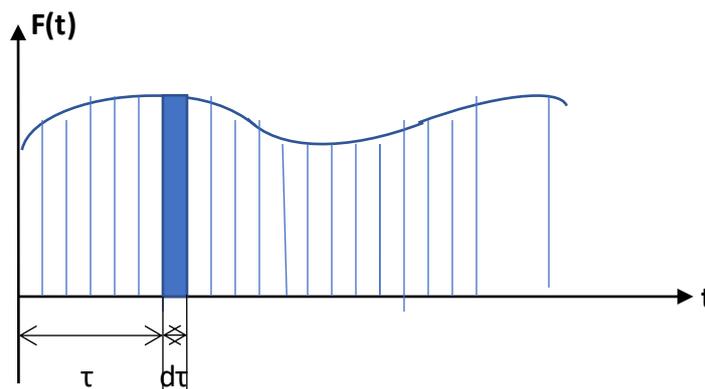


Figure 20p : Charge dynamique quelconque représentée par une succession de charges de courte de durée

Si on considère une charge particulière qui se termine au temps  $\tau$  après le début de son application, et à une durée infinitésimale  $dt$ , l'aire correspondant à cette charge est égale à :  $F(\tau) dt$ .

Cette charge seule génère une réponse unitaire en oscillation libre au temps  $t$  donnée par l'équation (38p) qui s'écrit, pour tout  $t \geq \tau$  :

$$dx(t) = \frac{1}{m \omega_d} F(\tau) d\tau e^{-\xi\omega(t-\tau)} [\sin \omega_d(t-\tau)]$$

(39p)

La réponse totale du système au temps  $t$  s'obtient en superposant (intégrant) les réponses unitaires jusqu'au temps  $t$ , à savoir :

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin [\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

(40p)

L'équation (40p), obtenue en utilisant le principe de superposition, se nomme « intégrale de Duhamel ». Elle est valable uniquement pour un système linéaire.

### Remarque

Si la charge dynamique  $F(t)$  peut être représentée par une fonction numérique, alors la réponse du système est obtenue en intégrant l'équation (40p).

En pratique, et plus particulièrement dans le cas d'une agression sismique, on fait souvent appel à une application numérique.

D'autre part, si on constate que le système n'est pas au repos à  $t = 0$ , alors, il faut superposer la solution en oscillation libre de l'équation (27p). Ce qui donne :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{x_0 + \xi\omega x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right] + \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin [\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (41p)$$

Dans le cas d'un oscillateur non amorti, l'intégrale de Duhamel (40p) prend la forme suivante :

$$x(t) = \frac{1}{m \omega} \int_0^t F(\tau) \sin [\omega_d(t-\tau)] d\tau$$

D'une manière générale, la solution de l'équation (4p) est de type :

$x(t)$  = solution particulière de l'équation totale + solution générale de l'équation sans le second membre

Dans le cas le plus courant où  $\xi < 1$ , la solution est :

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} \sin (\omega_d t + \phi) + \text{solution particulière de l'équation totale}$$

Où,

$$X = \frac{1}{\omega_d} \sqrt{(x_0 \omega_d)^2 + (x_0 \dot{\phantom{x}} + \xi \omega x_0)^2} = \text{amplitude de la réponse}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{\omega_d x_0}{x_0 \dot{\phantom{x}} + \xi \omega x_0} \right] = \text{angle de phase}$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

L'expression précédente peut s'écrire encore :

$$x(t) = X e^{-\xi\omega t} \sin [(\omega \sqrt{1 - \xi^2}) t + \phi] + \text{solution particulière de l'équation totale}$$